Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт механики сплошных сред
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Пименова Анастасия Владимировна

ДИНАМИКА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ТЕКУЧИХ СРЕД С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

01.02.05 – механика жидкости, газа, плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических
наук, профессор
Райхер Ю.Л.

Пермь 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление 2
Введение 5
Обзор литературы 5
Общая характеристика работы 14
Глава 1. Кипение системы двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент 23
1.1. Горение легкого жидкого топлива, налитого поверх более тяжелой негорючей жидкости 23
1.2. Кипение жидкостей с близкими физическими параметрами 26
1.2.1. Эволюция парового слоя 26
1.2.2. Решение уравнений эволюции парового слоя 34
1.2.3. Связь кинетики парового слоя со средними макроскопическими показателями поля: срыв парового слоя в случае хорошо перемешанной системы 38
1.2.4. Парообразование при постоянном притоке тепла 48
1.2.5. Динамика остывания системы в отсутствие притока тепла 48
1.3. Кипение жидкостей с произвольными физическими параметрами 52
1.3.1. Эволюция парового слоя 52
1.3.2. Решение уравнения эволюции парового слоя 59
1.3.3. Срыв парового слоя в хорошо перемешанной системе 62
1.3.4. Срыв парового слоя в стратифицированной системе 68
1.3.5. Парообразование при постоянном притоке тепла 71
1.4. Оценка параметров кипения на границе раздела реальных жидкостей на примере горящего *н*-гептана, налитого поверх воды 72
1.5. Оценка допустимости используемых упрощений 73
1.6. Выводы 74

Глава 2. Гравитационная неустойчивость тонкого слоя газа между двух толстых слоев жидкостей 76
2.1. Динамика тонкого парового слоя, заключенного между двумя полупространствами жидкостей..... 77
2.2. Линейная неустойчивость состояния со строго горизонтальными границами раздела 82
2.2.1. Предельные случаи бесконечно тонкого и бесконечно толстого слоя 83
2.2.2. Случай тонкого ненулевого парового слоя..... 85
2.3. Выводы 89
Глава 3. Волны на горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях..... 90
3.1. Постановка задачи и вывод уравнений..... 90
3.2. Уравнение эволюции крупномасштабных возмущений 94
3.3. Крупномасштабный характер линейной неустойчивости 104
3.4. «Плюс»-уравнение Буссинеска и «классическое» уравнение Буссинеска для гравитационных волн на мелкой воде 105
3.5. Крупномасштабные волны ниже порога линейной неустойчивости системы 107
3.5.1 Линейные волны 107
3.5.2. Солитоны 108
3.6. Выводы 110
Глава 4. Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел 111
4.1. Уравнение вязкоупругой среды..... 111
4.2. Метод возмущений 114
4.3. Решение в ведущем порядке 116
4.4. Первая поправка 121
4.5. Диссипативные силы 128
4.6. Выводы 130

Заключение 131
Итоги выполненного исследования 131
Практические рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. 134
Список литературы 135
Приложение А. Оценка зависимости параметра перемешанности системы $(\delta S \,/\, \delta V)$ от внешнего притока тепла 146
Приложение В. Распределение частиц в слое пара 151
Приложение С. Вычисление физических параметров паровой смеси 153

ВВЕДЕНИЕ

В ряде многофазных жидкостных систем динамика ключевым образом определяется процессами, протекающими на поверхностях контакта фаз или в ее непосредственной окрестности. Такие системы интересны как с точки зрения математической физики, поскольку их специфика определяет и специфику математического описания, так и своими практическими приложениями.

Диссертация посвящена исследованию процессов на границе контакта фаз в несмешивающихся текучих системах.

Обзор литературы

Кипение системы двух несмешивающихся жидкостей

Одним из примеров системы, динамика которой во многом зависит от процессов, происходящих на границе раздела двух сред, является система двух несмешивающихся жидкостей, температура кипения которой оказывается ниже температуры объемного кипения каждой из компонент [1,2]. Механизм этого явления заключается в том, что кипение начинается не во всем объеме, а на границе контакта раздела двух жидкостей. Частицы обеих жидкостей в процессе испарения образуют паровой слой, давление в котором, в соответствии с законом Дальтона, равняется сумме давлений насыщенных паров каждой из компонент в отдельности. Кипение на границе раздела начинается при достижении температуры, при которой сумма давлений насыщенных паров превысит окружающее атмосферное давление:

$$p_1^{(0)} + p_2^{(0)} > p_0;$$

тогда как для кипения чистого вещества необходимо, чтобы давление насыщенных паров одного этого вещества превысило атмосферное давление:

$$p_i^{(0)} > p_0 .$$

Взаимная нерастворимость жидкостей важна в связи с тем, что уменьшение концентрации основной компоненты в растворе приводит к снижению давления ее насыщенных паров над поверхностью раствора [1]. Таким образом, при взаимной растворимости жидкостей должны складываться пониженные давления насыщенных паров. При полной взаимной растворимости эффект может пропадать полностью, либо быстро ослабевать со временем после смешения жидкостей по мере их взаимного растворения на границе контакта.

Описываемый эффект хорошо известен и широко используется в различных технологических процессах. В частности, на основании этого эффекта можно осуществлять дистилляцию веществ, чувствительных к температурному воздействию. Примером такового вещества может служить тетраэтилсвинец, температура кипения которого превышает температуру его частичного разложения [3]. При смешении тетраэтилсвинца с водой дистилляцию можно осуществлять при температуре, близкой к температуре кипения воды, избегая разложения.

Процесс кипения на границе контакта жидкостей в случае, когда одна из них находится ниже температуры своего объемного кипения, но при этом выше температуры объемного кипения второй жидкости, достаточно хорошо изучен экспериментально. Так, например, в работах [4,5] экспериментально исследовался процесс парообразования на границе контакта воды и вводимых в нее капель нерастворимых веществ с низкой температурой кипения, таких как фреоны. В работах [6,7] описаны эксперименты, в которых наблюдался процесс кипения водных эмульсий, дисперсная фаза которых имела температуру кипения значительно ниже температуры кипения воды. Авторы работы [10] изучали процессы формирования пузырьков пара на границе, разделяющей горизонтальный слой летучей жидкости с низкой температурой кипения

(фторуглерод PF5050) и слой воды. Тепло подводилось к границе с помощью струи горячей воды. Некоторые основы теоретического описания роста парового слоя и пузыреобразования была приведены в работе [8] и более поздних работах [9,10,11].

Интерес к описанию кипения эмульсий, в которых одна из фаз существенно перегрета, понятен: такой процесс характеризуется высокими значениями коэффициента теплоотдачи, что широко используется в промышленности. Однако возможны и ситуации, когда кипение будет происходить ниже температуры объемного кипения каждой из компонент. Одним из примеров может служить система, состоящая из слоя горючей жидкости, разлитой поверх более тяжелой негорючей жидкости. В этом случае как раз будет реализовываться сценарий кипения при температуре, не превышающей температуры кипения компонент.

На данный момент полной теории для описания кинетики процесса кипения двух несмешивающихся жидкостей при температуре ниже температуры объемного кипения каждой из компонент в литературе не представлено.

Гравитационная неустойчивость тонкого слоя газа между двумя толстыми слоями жидкостей

При рассмотрении кинетики парового слоя, образующегося в двухслойной стратифицированной системе двух несмешивающихся жидкостей, встает вопрос о нахождении времени его роста от зарождения до момента срыва. На ранних стадиях процесса кипения, когда система еще не перемешана активным процессом парообразования, срыв парового слоя обуславливается развитием неустойчивости Релея–Тейлора на верхней границе раздела жидкость–газ.

Гравитационная неустойчивость системы двух несмешивающихся жидкостей в случае, когда более тяжелая жидкость налита поверх более легкой, впервые была описана в работе Лорда Релея [13] в середине XIX века, однако

первые экспериментальные наблюдения, которые дали начало современной теории гравитационной неустойчивости, были проведены независимо Тейлором и Льюисом несколько позже [14,15].

В работе [15] Льюис показал, что неустойчивость на границе вода–воздух последовательно проходит три стадии. Начальная стадия, характеризуемая экспоненциальным ростом неустойчивости, сменяется сначала переходной стадией, сопровождаемой образованием отдельных пузырьков, а потом асимптотической стадией, в ходе которой образуется колонна непрерывно поднимающихся пузырьков воздуха. Это наблюдение было подтверждено работами [16,17], в которых, помимо этого, изучалось влияние поверхностного натяжения на развитие неустойчивости.

В дальнейшем неустойчивость Релея–Тейлора на границе двух несмешивающихся жидкостей была изучена для систем с самыми разными характеристиками. В частности, в работах [18,19] исследовалось влияние поверхностного натяжения на развитие неустойчивости. Было показано, что для жидкостей с малым числом Атвуда, используемого в качестве критерия подобия двух жидкостей по плотностям, скорость развития неустойчивости значительно меньше, чем для жидкостей с большим числом Атвуда [18]. Другие работы были посвящены описанию влияния самых различных факторов на развитие этого типа неустойчивости, таких как вязкость [20], наличие внешнего магнитного поля [21], сферической геометрии системы [22].

В настоящее время классическая неустойчивость Релея–Тейлора на границе двух несмешивающихся жидкостей достаточно хорошо изучена, множество монографий и обзоров посвящено данному вопросу [23,24,25].

Неустойчивость Релея–Тейлора играет важную роль при описании пленочного кипения однокомпонентных жидкостей [26,27]. При таком режиме кипения на границе жидкости и нагреваемой поверхности образуется тонкая

прослойка пара. В процессе испарения жидкости, толщина прослойки растет, и на границе жидкость–газ развивается неустойчивость Релея–Тейлора. Впервые теоретическое исследование данного вида неустойчивости при пленочном кипении было проведено Бренсоном в [28]. Позднее полученные им результаты были повторены Баумайстером и Гамиллем [29]. Рукенштайн использовал анализ неустойчивости Релея–Тейлора для определения площади, с которой срывается пузырек пара, и скорости обновления парового слоя [30]. Оценка размера образующихся пузырьков пара и частоты срыва пузырьков позднее была получена в работе [32]. Во всех приведенных выше работах поток пара считался ламинарным, Фредерикинг впервые рассмотрел возможность развития турбулентности внутри слоя пара, он провел сравнительный анализ применимости различных теорий, учитывающих или не учитывающих турбулентность и однородность, для реальных веществ с разными характеристиками (вода, фреон, *н*-гептан, тетрахлорметан) [31].

В связи с рассмотрением процесса поверхностного кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент, становится актуальной задача о гравитационной неустойчивости трехслойной системы, в которой между двумя устойчиво стратифицированными слоями жидкостей заключен тонкий слой пара. В этом случае срыв парового слоя происходит в связи с развитием неустойчивостью Релея–Тейлора на верхней границе раздела жидкость–пар, на которой относительно тяжелая жидкость находится поверх практически невесомого слоя пара. Описываемая ситуация является достаточно специфической; в сущности, процесс парообразования на границе двух жидкостей является единственным стабильным механизмом возникновения и поддержания настолько тонкой паровой прослойки между двумя толстыми слоями жидкостей в реальной системе. Теоретическое описание процесса развития неустойчивости в подобной трехслойной системе в настоящее время в литературе не представлено.

Волны на горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях

При рассмотрении многослойных систем с естественными гидродинамическими неустойчивостями встает вопрос о возможности искусственного управления свойствами устойчивости состояния этих систем. Впервые возможность управления неустойчивостью Релея–Тейлора в многослойных жидкостных системах была описана в экспериментальных работах Г. Вольфа [34,35]. Он изучал возможность стабилизации инвертного положения сред (легкая жидкость находится под более тяжелой) по средством воздействия на них высокочастотными разнонаправленными вибрациями. Было показано, что вертикальные вибрации могут приводит к стабилизации инвертированных состояний, тогда как при горизонтальных вибрациях плоская поверхность раздела становится неустойчивой, при этом на ней могут возникать практически неподвижные структуры, амплитуда которых зависит от уровня вибраций, причем этот эффект проявлялся лишь для жидкостей со сравнимыми плотностями, на свободной поверхности раздела (например, в системе жидкость–газ) неподвижный волновой рельеф не наблюдался. Также было обнаружено, что возникновение рельефа носит пороговый характер.

Первое теоретическое описание проблемы динамической стабилизации неустойчивости Релея–Тейлора приведено Тройоном в работе [36]. Он численно определил границы устойчивости плоской поверхности раздела.

Частичный анализ линейной неустойчивости двухслойной системы в поле горизонтальных и вертикальных вибраций был проведен в работах [37–40]. В частности, было приведено теоретическое обоснование результатам экспериментов Вольфа. В работах [38,39] была исследована линейная неустойчивость систем.

Отдельное внимание в данных работах уделено исследованию динамики систем в поле горизонтальных вибраций. Так, Любимов и Черепанов показали, что высокочастотные горизонтальные вибрации, в отличие от вертикальных, действительно не могут подавлять неустойчивость Релея–Тейлора. Было показано, что воздействие горизонтальных вибраций приводит к возникновению квазиравновесных состояний. Также они обнаружили, что в достаточно тонких слоях невязких жидкостей неустойчивость имеет длинноволновый характер [37]. Для случая одинаковой толщины слоев h, условием длинноволновости является $h < [3\sigma/(g(\rho_1 - \rho_2))]^{1/2}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ_i — плотность i-й жидкости, g — ускорение свободного падения.

В обсуждаемых работах для анализа квазиранвновесных конфигураций поверхности раздела невязких жидкостей применяется вариационный принцип. Здесь под «квазиравновесностью» подразумевается, что среднее по времени вибрационных пульсаций состояние поверхности является статическим. Подобно тому, как для ситуации без вибраций стационарные конфигурации многофазной системы могут быть найдены на основе минимизации ее полной энергии, для системы в поле высокочастотных вибраций может быть введен функционал, минимизация которого позволяет найти квазиравновесные состояния повернхности раздела многофазной системы [40,41].

Несмотря на достаточно хороший уровень теоретического описания поведения двухслойной системы в поле горизонтальных вибраций, слабонелинейный анализ динамических структур для случая невязких жидкостей в литературе не представлен. Подход, используемый в [37], может быть использован только для анализа квазиравновесных структур, для анализа осредненной эволюции формы поверхности он оказывается неприменим. В работе [37] показано, что квазиравновесные структуры могут образовываться в результате как прямой вилочной бифуркации, так и обратной. Позднее, в работе [41], было показано, что в случае достаточно тонких слоев бифуркация является

обратной: возбуждение квазиравновесного волнового профиля носит жесткий характер. Подход, используемый в работах [37,41], не только неприменим для отслеживания осредненной эволюции поверхности раздела, но и не позволяет провести анализ неустойчивости квазиравновесных конфигураций по отношению к динамическим структурам.

Противоположным случаю невязких жидкостей является предельный случай большой вязкости (или очень тонких слоев жидкости) [42]. Для этого случая анализ осредненной динамики профиля также оказывает проще, чем в общем случае жидкостей с произвольной вязкостью. Кроме того, ключевой механизм генерации основного течения оказывается полностью иным: не вытеснение жидкости движением боковых стенок, а прилипание жидкости к горизонтальным границам. Динамика системы в этом случае оказывается сущесственно диссипативной. В работе [43] было показано, что все периодические и солитонные решения в такой системе являются неустойчивыми: они формируют границу между бассейном притяжения состояния с плоской поверхностью раздела и бассейнами притяжения состояний с разрывами пленки или конечноамплитудными волнами.

Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел

Еще одной задачей, в которой динамика системы определяется процессами на деформируемой границе контакта двух сред, является задача о динамическом контакте двух вязкоупругих тел.

Рассмотрение диссипативных сил при столкновении вязкоупругих тел интересно, в первую очередь, в связи с развитием теории гранулированных сред, как естественного, так и искусственного происхождения [44–48]. Такие материалы интересны тем, что могут проявлять свойства как твердых, так и жидких или газообразных сред [49–52] в зависимости от внешних нагрузок [53–55]. Физическая основа такого поведения гранулированных сред лежит в природе

взаимодействия между их частицами. В отличие от молекулярных или атомных систем, в которых частицы взаимодействуют только посредством консервативных сил, силы, действующие в гранулированных системах, имеют диссипативную составляющую. Так происходит потому, что частицы сами по себе являются макроскопическими телами, имеющими макроскопически большое число микроскопических степеней свободы. В процессе столкновения таких тел их механическая энергия, связанная с поступательным или вращательным движением или упругими деформациями, частично переходит в тепловую энергию. Таким образом, для точного описания поведения гранулированных сред необходима модель, описывающая межчастичное взаимодействие, в том числе, силовое, с учетом упругих и диссипативных составляющих.

Упругая составляющая сил межчастичного взаимодействия была описана более века назад в известной работе Г. Герца [56]. Он получил математически строгий результат для сил, действующих между упругими телами в момент контакта, в приближении малых деформаций. Выражение же для диссипативных сил не было получено до сих пор. Существующие феноменологические теории используют линейную (например, [57,58]) или квадратичную [59] зависимости силы от скорости деформации. Ни одна из этих зависимостей не согласуется с экспериментальными данными [57–60]. Попытка описать диссипативную силу из первых принципов была предпринята в [61], но в ее основе лежало предположение о том, что существенное значение имеет только деформация сдвига, что накладывало существенные ограничение на область применимости результатов работы. Первое достаточно полное описание [62] основывалось на приближении, в рамках которого предполагается, что поле смещения в объеме сталкивающихся тел аналогично полю смещения при статическом контакте. Найденный в [62] характер функциональной зависимости диссипативной силы от скорости и величины деформации был ранее предложен в работе [63] без строгого математического вывода. В работах [64,65] выражение для диссипативной силы, полученное в [62], было уточнено, но описание по-прежнему было не вполне верным. С физической

точки зрения, общей особенностью работ [62,64,65] является то, что в них вычисляются вязкие напряжения на поверхности контакта, но не учитываются аналогичные напряжения и связанные с ними деформации в объеме.

Отметим две явные проблемы в результатах упомянутых более ранних работ. В случае столкновения разнородных тел диссипативные силы, действующие на первое и второе тело, оказываются различны, что противоречит третьему закону Ньютона. Другая очевидная некорректность может быть замечена в зависимости диссипативной силы от коэффициента Пуассона. Если сдвиговый модуль упругости исчезающе мал по сравнению с объемным модулем упругости, т.е. коэффициент Пуассона приближается к значению 0.5 (как, например, для резины), диссипативная сила в работах [62,64,65] стремится к нулю, что, очевидно, «нефизично».

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Одним из примеров многофазной системы, динамика которой существенным образом зависит от процессов, протекающих на границе раздела, является система двух несмешивающихся жидкостей, в которой процесс интенсивного парообразования происходит на поверхности контакта жидкостей и начинается ниже температуры объемного кипения каждой из компонент [1]. Об этом явлении можно говорить как о поверхностном кипении. Эффект понижения температуры кипения широко используется в различных промышленных процессах; в качестве примера можно привести перегонку с водяным паром, позволяющую осуществить дистилляцию веществ, температура кипения которых при атмосферном давлении выше температуры их частичного или полного разложения. Описываемый эффект оказывает значительное влияние на условие воспламенения жидкого топлива: воспламенение смеси керосина с водой требует более низкой температуры, чем воспламенение чистого керосина; в

промышленности распространено сжигание водно-мазутных эмульсий, а не чистого мазута; горящее жидкое органическое топливо нельзя тушить водой из-за того, что контакт горящего топлива с водой вызывает интенсивное образование паров обоих веществ. С исследовательской точки зрения, задача о кинетическом описании процесса парообразования в таких системах ниже температур объемного кипения обеих компонент представляет особый интерес, поскольку не сводится к задаче о тепло- и массопереносе и последующем обычном объемном кипении, как в случае, если одна из компонент оказывается в итоге перегретой выше температуры своего объемного кипения. Указанной задаче посвящена первая глава диссертации.

Описание кинетики растущего парового слоя, возникающего между контактирующими жидкостями, на ранних стадиях, когда система еще не перемешана интенсивно образующимися пузырьками пара, требует исследования гравитационной неустойчивости (неустойчивости Релея–Тейлора) трехслойной стратифицированной системы жидкость–газ–жидкость, где толщина слоя газа существенно меньше толщины слоев жидкостей. Именно вследствие развития гравитационной неустойчивости на верхней границе контакта жидкость–пар происходит срыв парового слоя и формирование пузырька пара, отделяющегося от границы контакта жидкостей.

В связи с рассмотрением естественных неустойчивостей двухслойных систем встает вопрос о возможности искусственного управления свойствами устойчивости состояний таких систем, включая полное подавление неустойчивостей. Именно этот вопрос послужил мотивом экспериментальных работ Вольфа [34,35] по использованию вибрационного воздействия для подавления неустойчивости Релея–Тейлора. Для случая горизонтальных вибраций Любимовым и Черепановым [37] был позже установлен новый механизм неустойчивости стратифицированного состояния, однако задача о динамике волн с учетом нелинейности и свойствах их устойчивости в случае

малой толщины вязких пограничных слоев оставалась открытой. Исследование динамики структур, образующихся при воздействии горизонтальными вибрациями на систему двух несмешивающихся жидкостей, описанное в третьей главе настоящей работы, интересно в связи с развитием теории управления состояниями многофазных жидкостных систем с помощью высокочастотных вибраций.

Решение задачи о возникновении диссипативных сил при столкновении двух вязкоупругих тел актуально как с точки зрения развития фундаментальной теории контактного взаимодействия, так и для рассмотрения прикладных вопросов динамики гранулированных сред. В теориях, разработанных ранее [62,65], учитывались только вязкие напряжения на поверхности контакта, при этом аналогичные напряжения и связанные с ними деформации в объеме не принимались во внимание, что приводило к явным несоответствиям с фундаментальными физическими законами.

Цели работы:

1. Построение теоретического описания процесса кипения двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент на основе первых принципов.
2. Исследование зависимости времени срыва парового слоя, образующегося в процессе кипения на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, от макроскопических характеристик состояния системы.
3. Описание развития гравитационной неустойчивости тонкого газового слоя, заключенного между двумя толстыми слоями жидкостей.
4. Исследование динамики структур, возникающих на поверхности раздела двух горизонтальных тонких слоев несмешивающихся жидкостей при наличии высокочастотных горизонтальных вибраций.

5. Нахождение точного выражения для описания диссипативных сил, возникающих при столкновении двух вязкоупругих тел.

Методология и методы исследования

В ходе диссертационного исследования широко используются аналитические методы, в частности, методы анализа дифференциальных уравнений, методы функционального анализа и математической физики. Для решения поставленных задач используются методы разложения по малому параметру и метод многих масштабов.

Научная новизна работы заключается в том, что в ней впервые:

1. Построена математическая модель процесса кипения системы двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент, основанная на макроскопическом описании процессов переноса в системе.
2. Найдена связь кинетики парового слоя в описанной выше системе с макроскопическими характеристиками состояния системы.
3. Найдена зависимость параметра $\partial S / \partial V$ (площадь поверхности контакта в единице объема системы), характеризующего степень перемешанности системы, от притока тепла в систему. Анализ учитывает особенности транспортных процессов в турбулентном пограничном слое и опирается на предположение о стохастизации слабо неконсервативной механической динамики системы.
4. Проведен анализ линейной неустойчивости трехслойной стратифицированной системы жидкость–газ–жидкость; найден спектр инкрементов возмущений.
5. Выведено эволюционное уравнение для волн, возникающих в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей при воздействии на них горизонтальными высокочастотными вибрациями. Существенным

осложнением, не позволяющим строить типовой околопороговый слабонелинейный анализ, является консервативность системы и наличие бесконечного числа нейтрально устойчивых степеней свободы.

6. Развит подход к вычислению отклика упругой среды на локализованные в окрестности поверхности контакта объемные силы на основе подхода Ландау [66] к решению Задачи Герца.
7. Проведен строгий анализ задачи о динамическом контакте вязкоупругих тел в рамках квазистатического приближения и вычисление исправленного выражения для нахождения диссипативной силы при столкновении вязкоупругих тел, которое свободно от противоречий, имевшихся в более ранних теориях других авторов.

Автором представляются к защите:

1. Кинетическая теория процесса поверхностного кипения в системе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения обеих компонент [**67**,**68**].
2. Математические модели динамики макроскопических параметров состояния системы двух несмешивающихся жидкостей при поверхностном кипении ниже температуры объемного кипения обеих компонент [**67**,**68**,73,75,80].
3. Результат теоретического вычисления скорости развития гравитационной неустойчивости (неустойчивости Релея–Тейлора) для тонкого парового слоя между двумя толстыми слоями жидкости [**69**,**76**,77].
4. Уравнения, описывающие нелинейную динамику длинных волн на поверхности раздела двух бесконечных слоев невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций [**70**,78,81].
5. Подход к аналитическому вычислению деформаций в окрестности поверхности контакта двух упругих тел при наличии распределенной

объемной силы [**71,72,**74,79].

6. Результат вычисления диссипативной силы при динамическом контакте вязкоупругих тел выпуклой формы в квазистатическом приближении (скорость столкновения тел мала по сравнению со скоростью звука в них) [**71,72,**74,79].

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов подтверждается согласием между теоретическими результатами и экспериментальными данными; совпадением теоретических результатов, полученных разными методами и в рамках разных подходов; согласием результатов диссертационных исследований в предельных случаях с известными ранее результатами; внутренняя непротиворечивость результатов.

Личный вклад автора

Постановка задач, результаты исследования и их интерпретация обсуждалась с научным руководителем Ю.Л. Райхером. Выбор теоретических моделей и методов решения осуществлялся совместно с Д.С. Голдобиным. Основная часть аналитических и численных расчетов выполнена автором лично. Подготовка публикаций проводилась совместно с Д.С. Голдобиным.

Публикации

Материалы диссертации изложены в 8 статьях, 6 из которых опубликованы в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендуемых ВАК, [**67–72**], 1 статья опубликована в электронном виде [73], 1 статья опубликована в рецензируемом журнале, индексируемом РИНЦ [74], 2 трудах конференций [75,76] и 5 тезисах конференций [77–81].

Апробация работы

Результаты работы докладывались на Пермских гидродинамических чтениях (Пермь, 28–30 ноября 2013), VIII Научно-практическом семинаре «Актуальные проблемы физики конденсированных сред» (Пермь, 8–10 октября 2014), XIX Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 24–27 февраля 2015), Научной школе «Нелинейные волны – 2016» (Нижний Новгород, 27 февраля – 4 марта 2016), Пермском городском гидродинамическом семинаре им. Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого (Пермь, 25 декабря 2014 и 15 апреля 2016), 8th Conf. of the Int. Marangoni Association (Bad Honnef, 12 – 16 июня 2016).

Практическая и теоретическая ценность

Результаты, полученные в первой и второй главах настоящей работы, могут быть востребованы в различных прикладных задачах химической промышленности, а также в связи с изучением процессов горения жидкого топлива. Уравнения, полученные в третьей главе, могут быть использованы для вибрационного управления двухслойной системой жидкостей. Результаты четвертой главы имеют фундаментальное значение для развития теории контактного взаимодействия, а также могут оказаться полезными для описания динамики гранулированных систем, как природного, так и искусственного происхождения. Разработанный метод решения задач с объемными силами может в дальнейшем применяться для широкого круга различных задач (в частности, решения задачи о влиянии адгезии при динамическом контакте).

Содержание и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех содержательных глав, заключения, списка литературы и трех приложений. Объем диссертации без учета приложений составляет 145 страницы. В работу включено 13 рисунков. Список литературы содержит 113 наименований.

В первой главе настоящей работы рассматривается задача о парообразовании в системе двух несмешивающихся жидкостей при температурах меньших температуры объемного кипения каждой из компонент, но больших температуры, при которой сумма давлений насыщенных паров компонент равна атмосферному давлению. В главе построено теоретическое описание кинетики парового слоя на границе контакта. Рассмотрены связь решения для кинетики парового слоя с интегральными характеристиками режима кипения системы и вопрос об остывании системы в отсутствии притока тепла.

Во второй главе рассматривается задача о гравитационной неустойчивости (неустойчивости Релея–Тейлора) тонкого горизонтально парового слоя, заключенного между двумя полупространствами, заполненными жидкостями (или толстыми слоями жидкостей), причем легкая жидкость находится сверху. Задача решена аналитически в приближении невязких жидкостей и вязкого невесомого пара. Для верификации результата рассмотрены предельные случаи бесконечно тонкого и бесконечного толстого слоя пара. Показано, что эти предельные случаи полностью соответствуют хорошо изученным случаям гравитационно-капиллярных волн на границах раздела жидкость–жидкость и жидкость–газ. Также показано, что система достаточно протяженная в горизонтальном направлении всегда находится в неустойчивом состоянии, волновое число возмущений не ограничено снизу. Найдена длина волны наиболее быстро растущих возмущений и скорость их роста как функция толщины парового слоя.

В третьей главе изучаются волны на поверхности раздела двух невязких несмешивающихся жидкостей, подверженных действию горизонтальных вибраций. Получены уравнения динамики образующихся волн. Показано, что выведенная система уравнений может быть сведена к «плюс»-уравнению Буссинеска.

В четвертой главе представлена теория, позволяющая вычислить диссипативные силы, возникающие при столкновении двух вязкоупругих тел.

Рассматривается случай взаимодействия тел произвольной выпуклой формы с отличающимися материальными параметрами при отсутствующем трении. Теория построена на основе метода возмущений; в рамках теории также определяются диссипативные силы в объеме тела.

ГЛАВА 1. КИПЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ НИЖЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЪЕМНОГО КИПЕНИЯ КАЖДОЙ ИЗ КОМПОНЕНТ

Данная глава посвящена описанию процесса кипения на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей (т.е. жидкостей, растворимость которых друг в друге мала). Известно, что такая система обладает интересной особенностью: температура ее закипания оказывается меньше температуры закипания каждой из компонент по отдельности [1], причем эффект понижения температуры кипения оказывается тем сильнее, чем ближе температуры объемного кипения компонент при заданном давлении. Механизм этого явления заключается в том, что закипание происходит не во всем объеме рассматриваемой системы, а на границе контакта жидкостей. В слой пара между жидкими фазами испаряются частицы из обеих жидкостей, в результате чего давление в этом слое оказывается равно сумме давлений насыщенных паров двух жидкостей. Если сумма этих давлений превышает атмосферное давление, начинается рост парового слоя, в то время как для объемного кипения каждой отдельной компоненты требуется, чтобы давление насыщенных паров одной этой компоненты превысило атмосферное давление.

1.1. Горение легкого жидкого топлива, налитого поверх более тяжелой негорючей жидкости

Несмотря на то, что абсолютное большинство опубликованных ранее работ сосредоточены на исследовании процесса кипения в системе, в которой одна из жидкостей существенно перегрета, рассмотрение случаев, когда имеет место кипение системы двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент, также представляет не только академический, но и практический интерес.

Очевидно, что даже если одна из компонент перегрета, система неизбежно пройдет через переходное состояние, в котором поверхностное кипение уже началось или все еще не прекратилось, но обе компоненты находятся ниже температуры своего объемного кипения. Это могут быть поздние стадии самоостывания системы в отсутствие притока тепла или ранние стадии перемешивания двух жидкостей, начальные температуры которых таковы, что одна из жидкостей в процессе перемешивания достигнет перегретого состояния до достижения термодинамического равновесия. Однако, возможны ситуации, когда система сама поддерживает режим, при котором обе жидкости находятся ниже температуры своего объемного кипения.



(а) (б) (в)

Рисунок 1.1. Горение уайт-спирита, разлитого поверх воды. (а) Сразу после воспламенения. Система остается достаточно хорошо стратифицированной (конвективные потоки подавляются), происходит интенсивное испарение на границе без объемного кипения. (б) 2 минуты после воспламенения. С границы раздела вода–уайт-спирит срываются редкие пузырьки пара. Объемное кипение воды по-прежнему не началось. Со временем интенсивность кипения увеличивается, так как слой уайт-спирита по мере выгорания становится тоньше, соответственно, приток тепла к границе увеличивается. (в) 4 минуты после воспламенения. На границе происходит активное кипение, хотя система все еще остается в некоторой мере стратифицирована.

В качестве примера можно рассмотреть процесс горения жидкого топлива, разлитого поверх более тяжелой негорючей жидкости. Такая постановка актуальна, например, при описании процессов горения нефтепродуктов, разлитых

на поверхностях водоемов. Известно, что при горении жидкости в открытом контейнере происходит интенсивное парообразование на поверхности, но объемное кипение не начинается. Температура горящей поверхности нагревается до температуры объемного кипения, но остальной объем жидкости остается при более низкой температуре. Если приток тепла от пламени оказывается достаточным, чтобы довести весь объем жидкости до температуры объемного кипения, происходит существенная интенсификация парообразования. Приток кислорода, возможный только извне жидкости, уменьшается, и поток пара «отталкивает» пламя от поверхности жидкости, тем самым уменьшая приток тепла. В случае, если кислорода оказывается достаточно для воспламенения выделяемого пара, процесс горения приобретает взрывной характер. До тех пор, пока взрыва не происходит, можно говорить о том, что горение происходит без кипения в объеме жидкости. Примечательно, что в процессе горения в жидкости не происходит конвективного перемешивания, так как температурный градиент обеспечивает устойчивую стратификацию (подогрев сверху) и все конвективные потоки подавляются [82].

Наличие негорючей жидкости, налитой под горючую жидкость, несколько меняет ситуацию. Граница раздела между двумя этими жидкостями может быть нагрета до температуры поверхностного кипения без превышения температуры объемного кипения внутри горящей жидкости. Кипение границы может оказывать различное влияние на процесс горения в зависимости от физических свойств жидкости и геометрии системы. Однако в любом случае кипение границы будет происходить как раз при тех условиях, которые описываются в этой главе. Более того, если горючая жидкость является более летучей, чем негорючая тяжелая жидкость под ней (например, *н*-гептан, налитый поверх воды), обе компоненты никогда не достигнут перегретого состояния.

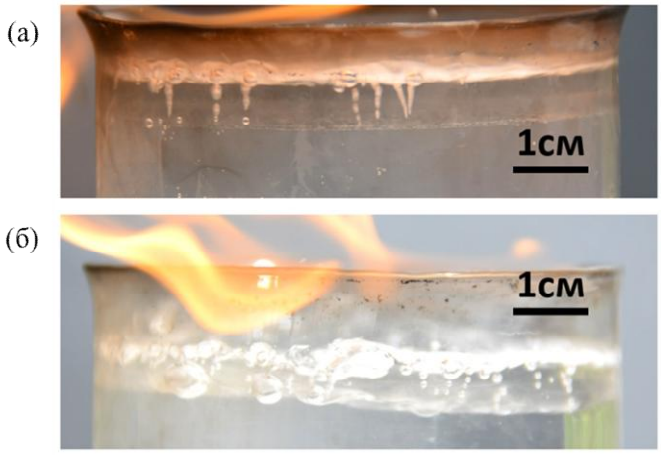


Рисунок 1.2. Горение слоя *н*-гептана поверх воды. (а) Ранняя стадия кипения, видны отдельные цепочки пузырьков пара, срывающихся с поверхности границы раздела. (б) Более поздняя стадия кипения характеризуется активным парообразованием.

На рисунках 1.1 и 1.2 приведены фотографии демонстрационных экспериментов горения в системах вода–уайт-спирит и вода–*н*-гептан, соответственно. На рисунках видно кипение на границе раздела воды и нерастворимых в ней горючих жидкостей, происходящее при горении последних.

1.2. Кипение жидкостей с близкими физическими параметрами

1.2.1. Эволюция парового слоя

При рассмотрении кипения на границе контакта двух несмешивающихся жидкостей для простоты, но без существенной потери общности, в этом разделе будет полагаться, что материальные параметры жидкостей близки (случай жидкостей с существенно отличающимися свойствами будет рассмотрен ниже). В этом случае в задаче имеет место симметрия относительно перестановки жидкостей. На рисунке 1.3 представлена система двух несмешивающихся жидкостей с паровым слоем, образующемся на их границе.

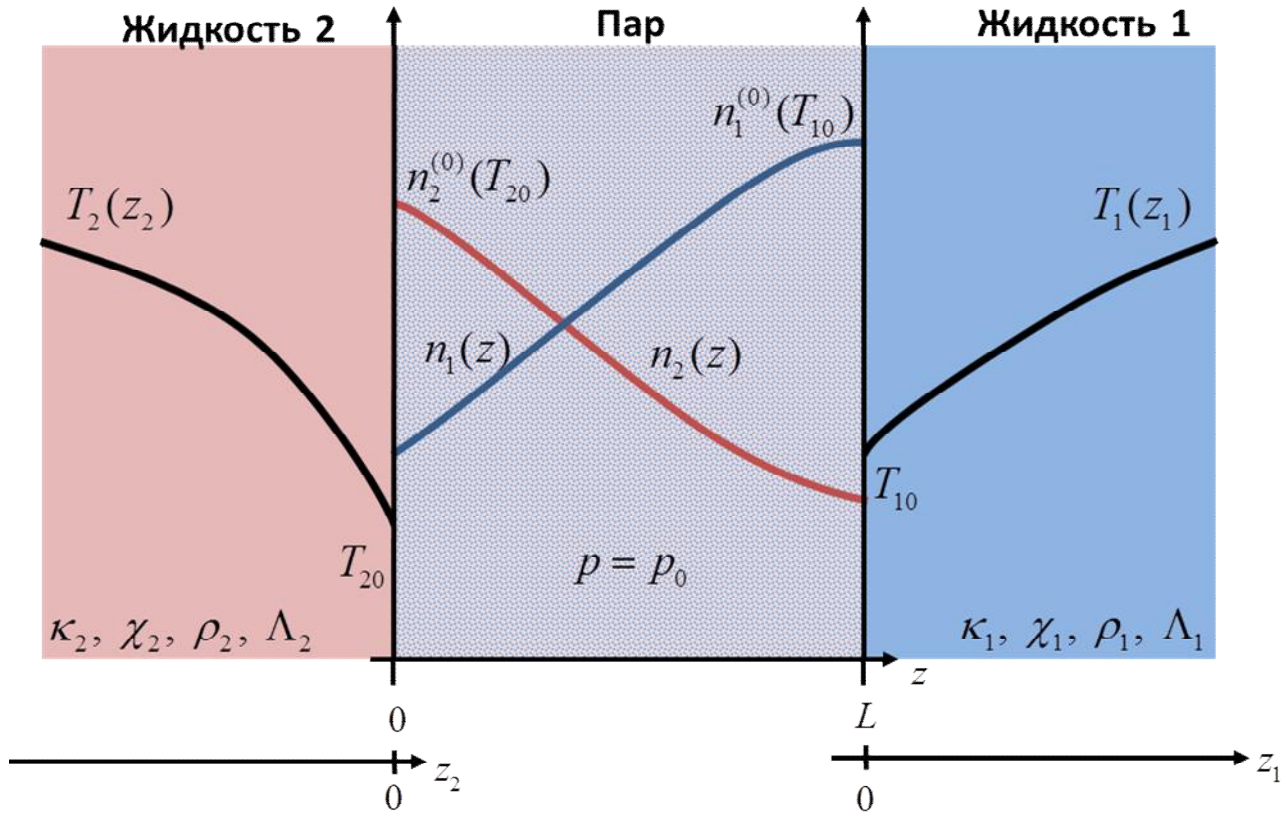


Рисунок 1.3. Растущий паровой слой между двумя испаряющимися жидкостями. Для каждой из областей введена своя поперечная координата z.

Кипение на границе контакта несмешивающихся жидкостей начинается при температуре T_*, при которой сумма давлений насыщенных паров каждой из жидкостей достигает атмосферного давления. Это условие в терминах концентрации частиц насыщенных паров $n_i^{(0)}$ формулируется следующим образом:

$$n_1^{(0)}(T_*) + n_2^{(0)}(T_*) = \frac{p_0}{k_\text{B} T_*},$$

где p_0 — атмосферное давление, k_B — константа Больцмана.

Математическое описание динамики системы основано на следующих физических положениях:

1. Температура в областях жидких фаз неоднородна, что обеспечивает приток тепла за счет молекулярной теплопроводности к поверхности, с которой происходит испарение.
2. В процессе испарения масса жидкой фазы теряется, и поверхность движется вглубь нее.
3. Вещество с поверхностей обеих жидкостей испаряется в паровой слой. Так как в данной работе рассматриваются несмешивающиеся жидкости, молекулы одного вещества из парового слоя на границе раздела со второй жидкостью не переходят в жидкую фазу. Концентрация частиц компоненты газа над поверхностью его жидкой фазы равна концентрации частиц насыщенного пара этого вещества при локальной температуре $T = T_* + \Theta$:

$$n_2(z=0) = n_2^{(0)}(\Theta) \text{ и } n_1(z=L) = n_1^{(0)}(\Theta).$$

4. Когда вещество испаряется со свободной поверхности (например, в вакуум) концентрация паров над поверхностью оказывается ниже концентрации насыщенных паров в связи с конечной скоростью оттока испаряющегося вещества [83–85]. В рассматриваемом случае испарение происходит не в открытое полупространство, а в паровой слой, перепад концентрации частиц на границах которого при температуре $T \to T_*$ стремится к нулю, т.е. диффузионный отток может становиться асимптотически мал. Таким образом, предположение о локальном термодинамическом равновесии на границе между паром и жидкостью должно оставаться с достаточной точностью справедливым по непрерывности до тех пор, пока перегрев системы достаточно мал.
5. Поскольку механическая инертность системы пренебрежимо мала по сравнению с тепловой и диффузионной «инертностью», давление в

пределах парового слоя можно считать постоянным и равным внешнему атмосферному давлению:

$$p = p_0 .$$

6. Суммарная объемная концентрация частиц подчиняется закону для идеального газа

$$n_1 + n_2 = n_0 = \frac{p_0}{k_\text{B} T},$$

где T — это локальная температура. При росте парового слоя перепад концентраций частиц компонент поперек него оказывается связан с концентрацией насыщенных паров, которая экспоненциально сильно зависит от температуры [1, 83]. Суммарная концентрация частиц n_0 зависит от температуры гораздо слабее, степенным образом, вследствие чего изменением n_0, связанным с отклонением температуры от T_*, можно пренебречь по сравнению с изменением $n_{1,2}$, и полагать

$$n_1 + n_2 = n_{0*} = \frac{p_0}{k_\text{B} T_*}. \qquad (1.1)$$

Приведенные положения не являются грубым приближением: все положения справедливы (как минимум) на ранних стадиях процесса роста парового слоя — в разделе 1.5 проводится подробный анализ результатов и справедливости приближений для значений параметров, соответствующих реальным веществам.

Наибольший интерес представляет случай, когда система далека от кипения каждой из компонент в отдельности, поэтому в данной работе рассматривается случай, когда поле температуры в системе несущественно превышает T_*:

$$T = T_* + \Theta(t,\zeta), \quad 0 < \Theta \ll \min(T_{\text{b},1} - T_*, T_{\text{b},2} - T_*),$$

где $T_{\text{b},i}$ — температура объемного кипения i-ой жидкости. В связи с тем, что отклонения температуры малы по сравнению с абсолютной температурой $(\delta T \,/\, T \ll 1)$, вариацией физических параметров, зависящих от температуры полиномиальным образом, можно пренебречь. В то же время, те параметры, которые зависят от T экспоненциальным образом, чувствительны даже к небольшим изменениям температуры, поэтому зависимостью этих параметров от температуры пренебрегать нельзя. Например, концентрация частиц насыщенного пара экспоненциально зависит от температуры, $n^{(0)}(T) \,/\, n^{(0)}(T_*) \propto e^{(T-T_*)/T_0}$, где T_0 имеет порядок $10\,\text{K}$, и $|\,\delta n^{(0)}\,| \,/ n^{(0)} = |\,\delta T\,| \,/ T_0$, что в 30–40 раз больше, чем $|\,\delta T\,| \,/ T$.

В соответствие со сказанным выше, зависимость концентрации частиц насыщенных паров от температуры можно линеаризовать:

$$n_{1,2}^{(0)} = \frac{n_0}{2} + \gamma\,\Theta, \tag{1.2}$$

где $\gamma \equiv (\partial n_2^{(0)} \,/\, \partial T)_{T=T_*} = (\partial n_1^{(0)} \,/\, \partial T)_{T=T_*}$.

Система координат в областях жидкой фазы выбрана таким образом, чтобы $z = 0$ соответствовало поверхности контакта с паровым слоем (см. рисунок 1.3).

Рассмотрим баланс числа частиц в системе. Распределение концентрации частиц внутри парового слоя происходит за счет молекулярной диффузии, которая подчиняется закону Фика:

$$\vec{J}_i = -D_{12} \nabla n_i, \tag{1.3}$$

где D_{12} — коэффициент взаимной диффузии. Коэффициент D_{12} не зависит от концентрации компонент и полиномиально зависит от температуры. На фоне больших относительных вариаций n_i малые относительные вариации температуры при полиномиальной зависимости $D_{12}(T)$ дают малые относительные вариации D_{12}, и ими можно пренебречь, полагая постоянным $D_{12} = D_{12}(p_0, T_*)$.

Соответственно, эволюция концентрации частиц в паровой области подчиняется уравнению

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{12} \nabla n_i) = D_{12} \frac{\partial^2 n_i}{\partial z^2}. \qquad (1.4)$$

Для удобства решения введем систему координат $(\tilde{t}, \zeta)$, в которой ширина парового слоя не будет зависеть от времени:

$$t = \tilde{t} \quad \text{и} \quad z = L(\tilde{t})\left(\zeta - \frac{1}{2}\right), \qquad (1.5)$$

где $\zeta \in \left[-1/2; 1/2\right]$ (границам парового слоя соответствует $\zeta = -1/2$ и $\zeta = 1/2$, рисунок 1.3), L — толщина парового слоя.

В этих терминах уравнение (1.4) имеет вид

$$\dot{n}_i - \zeta \frac{\dot{L}}{L} \frac{\partial n_i}{\partial \zeta} = \frac{D_{12}}{L^2} \frac{\partial^2 n_i}{\partial \zeta^2}. \qquad (1.6)$$

Так как в этом разделе рассматривается симметричная система, в дальнейшем всё рассуждение будет приведено для границы раздела пар–

жидкость 2. При смещении границы паровой области на δL_2, количество частиц δN_2, прошедших через площадь S поверхности раздела фаз, будет связано с числом частиц типа 2 в объеме $S\delta L_2$, приращенном со стороны жидкости 2 к паровому слою, следующим образом:

$$n_2\Big|_{z=0}\delta L_2 = D_{12}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=0}\delta t + \frac{\delta N_2}{S} = \left(D_{12}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=0} - \frac{\kappa_2}{\Lambda_2}\frac{\partial T_2}{\partial z}\Big|_{z=0}\right)\delta t, \quad (1.7)$$

где κ_2 — коэффициент теплопроводности жидкости 2, Λ_2 — теплота парообразования вещества 2 в расчете на одну частицу. Первое слагаемое в правой части уравнения (1.7) соответствует диффузионному потоку частиц, вызванному наличием градиента концентрации внутри паровой области, второе связано с переходом частиц из жидкой фазы в газовую. Для другого вещества на этой границе играет роль только диффузионное слагаемое:

$$n_1\Big|_{z=0}\delta L_2 = D_{12}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=0}\delta t. \quad (1.8)$$

С учетом того, что $dn_1 + dn_2 = 0$, совместное решение уравнений (1.7) и (1.8) на границе раздела дает:

$$-\frac{\kappa_2}{\Lambda_2}\frac{\partial T_2}{\partial z}\Big|_{z=0} = D_{12}\frac{n_0}{n_1\Big|_{z=0}}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad (1.9)$$

$$\dot{L}_2 = \frac{D_{12}}{n_1\Big|_{z=0}}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=0}. \quad (1.10)$$

Процесс теплопереноса в жидких фазах подчиняется уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + v_{li}\frac{\partial T_i}{\partial z} = \chi_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}, \qquad (1.11)$$

где χ_i — коэффициент температуропроводности i-ой жидкости, v_{li} — скорость ее смещения в системе координат, привязанной к границе раздела фаз. Скорость смещения границы определяется объемом жидкости, перешедшей в газовую фазу:

$$v_{l1} = -\frac{1}{n_{l1}}\frac{\kappa_1}{\Lambda_1}\frac{\partial T_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} \quad \text{и} \quad v_{l2} = -\frac{1}{n_{l2}}\frac{\kappa_2}{\Lambda_2}\frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}, \qquad (1.12)$$

где n_{l1} и n_{l2} — объемные плотности числа частиц в жидких фазах.

Поскольку в этом разделе рассматриваются жидкости, материальные параметры которых близки, можно считать, что паровая прослойка равномерно расширяется в обе стороны, т.е. $\delta L_1 = \delta L_2 = \delta L / 2$.

Уравнение (1.2) на границе имеет вид

$$n_2\Big|_{\zeta=-\frac{1}{2}} = \frac{n_0}{2} + \gamma\Theta, \quad n_1\Big|_{\zeta=\frac{1}{2}} = \frac{n_0}{2} + \gamma\Theta. \qquad (1.13)$$

Так как давление внутри парового слоя постоянно,

$$(n_1 + n_2)\Big|_{\zeta=-\frac{1}{2}}(T_* + \Theta) = n_0 T_*. \qquad (1.14)$$

Таким образом, из уравнений (1.13) и (1.14) вытекают следующие граничные условия:

$$n_1\Big|_{\zeta=-\frac{1}{2}} = \frac{n_0}{2} - \left(\frac{n_0}{T_*} - \gamma\right)\Theta \approx \frac{n_0}{2} - \gamma\,\Theta,$$
$$n_2\Big|_{\zeta=\frac{1}{2}} \approx \frac{n_0}{2} - \gamma\,\Theta. \qquad (1.15)$$

Таким образом, эволюция парового слоя полностью определяется уравнениями (1.6) и (1.11) (в которых $\dot{L} = 2\dot{L}_2$ и v_{li} определяются уравнениями (1.10) и (1.12), соответственно) с граничными условиями (1.9), (1.13) и (1.15).

1.2.2. Решение уравнений эволюции парового слоя

Уравнение (1.6) допускает решения с линейным профилем поля концентрации частиц $n_i = n_0 / 2 + \alpha_i\zeta$, $\alpha_1 = -\alpha_2$. В этом случае, граничные условия (1.13) и (1.15) принимают вид

$$n_1 = \frac{n_0}{2} + \alpha_1\zeta = \frac{n_0}{2} + 2\gamma\,\Theta\Big|_{z=0}\,\zeta,$$
$$n_2 = \frac{n_0}{2} - 2\gamma\,\Theta\Big|_{z=0}\,\zeta. \qquad (1.16)$$

Уравнение (1.6) для концентрации с линейным профилем принимает вид

$$\dot{\alpha}\zeta - \zeta\frac{\dot{L}}{L}\alpha = 0. \qquad (1.17)$$

Общее решение этого уравнения:

$$\alpha = CL = 2\gamma\,\Theta\Big|_{z=0}, \qquad (1.18)$$

где C — константа, служащая параметром решения. С учетом того, что рассматривается слабый перегрев системы, $\gamma\,\Theta \ll n_0 / 2$, решение уравнения (1.10) может быть записано в виде

$$L = \frac{4D_{12}}{n_0} C\, t\,. \tag{1.19}$$

Состояние системы в жидкой фазе описывается уравнением (1.11), скорость смещения жидкости v_{l2} в котором, с учетом (1.9), (1.12) и (1.18), имеет вид

$$v_{l2} = \frac{2D_{12}C}{n_{l2}}. \tag{1.20}$$

Решение уравнения (1.11) представимо в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое — линейно по времени: $\Theta_2 = \frac{2D_{12}}{\gamma n_0} C^2 t + \theta(z)$. Уравнение (1.11) в таком случае примет вид

$$\frac{2D_{12}C^2}{\gamma n_0} + v_{l2}\frac{\partial\theta}{\partial z} = \chi_2 \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{1.21}$$

В начальный момент времени ($t = 0$) уравнения (1.19) и (1.18) навязывают $\theta(0) = 0$. Таким образом, граничные условия для уравнения (1.21) принимают вид:

$$\theta\Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\Lambda_2}{\kappa_2} n_{l2} v_{l2}, \tag{1.22}$$

где $(\partial\theta \,/\, \partial z)\,|_{z=0}$ может быть найдено из уравнения (1.12).

Решение уравнения (1.21) удобно искать в виде суммы с выделенным линейным по z слагаемым:

$$\theta = \theta_0 - \frac{C}{\gamma}\frac{n_{l2}}{n_0} z + f(z). \tag{1.23}$$

Подстановка выражения (1.23) в уравнение (1.21) дает

$$f = f_0 e^{\frac{v_{l2}}{\chi_2} z} . \qquad (1.24)$$

Подстановка выражений (1.23) и (1.24) в уравнение (1.22) позволяет найти константы интегрирования θ_0 и f_0, и искомое поле температуры перегрева принимает вид:

$$\Theta = \frac{2D_{12}C^2}{\gamma n_0} t + \frac{n_{l2}}{n_0}\frac{C}{\gamma}\left|z\right| + \left(\frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} - \frac{{n_{l2}}^2}{n_0}\frac{\chi_2}{2D_{12}\gamma}\right)\left(1 - e^{-\frac{2D_{12}C}{\chi_2 n_{l2}}\left|z\right|}\right) , \qquad (1.25)$$

где $\mathcal{L}_2$ и $c_{p,l2}$ — удельные теплота парообразования и теплоемкость жидкости 2, соответственно.

Константа C является параметром решения, ее целесообразно заменить на конкретную физическую характеристику процесса, через которую данная константа может быть выражена; например, $\dot{L}$:

$$C = (n_0 \,/\, 4D_{12})\dot{L} .$$

Также удобно ввести обозначение для безразмерного аргумента экспоненты в выражении (1.25):

$$Z = \frac{n_0}{n_{l2}}\frac{\dot{L}}{2\chi_2} \mid z \mid . \qquad (1.26)$$

Рассмотрим подробнее получившееся выражение (1.25). Последнее, нелинейное по $\mid z \mid$, слагаемое в этом выражении описывает температурный пограничный слой в жидкой фазе, характерная толщина которого равна

$(\chi_2 n_{l2}) / (2D_{12}C)$. Примечательна амплитуда данного слагаемого для реальных веществ: например, характерные значения для воды

$$\frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} = 5.4 \cdot 10^2 \,\mathrm{K} \quad \text{и} \quad \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} = 1.0 \cdot 10^6 \,\mathrm{K}, \tag{1.27}$$

и для *н*-гептана (для многих органических веществ значения близки)

$$\frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} = 1.3 \cdot 10^2 \,\mathrm{K} \quad \text{и} \quad \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} = 0.7 \cdot 10^4 \,\mathrm{K}, \tag{1.28}$$

в то время как в данной работе теория строится для температур перегрева порядка $1 \,\mathrm{K}$. Более того, сам эффект наиболее важен до тех пор, пока не начинается объемное кипение одной из компонент, т.е. актуальные для эффекта величины перегрева не могут превышать нескольких десятков градусов Кельвина. Это означает, что система не может приближаться к насыщению слагаемого, описывающего температурный пограничный слой в жидкой фазе. Таким образом, для реальных физических систем актуален лишь очень небольшой начальный участок пограничного слоя, $Z \ll 1$. Тем не менее, ограничиваться только лишь линейным приближением в данном случае не достаточно. При записи выражения (1.25) в форме

$$\Theta = \frac{n_0 \dot{L}^2}{8 D_{12} \gamma} t + \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} \left(1 - e^{-Z}\right) + \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} \left(Z - 1 + e^{-Z}\right)$$

можно видеть (см. оценки (1.27) и (1.28)), что амплитуда второго слагаемого в последнем выражении на 3 порядка меньше амплитуды третьего слагаемого, в котором при разложении по Z постоянный и линейный вклады обращаются в нуль. При такой разнице в амплитудах квадратичная по Z часть третьего слагаемого может вносить не меньший вклад, чем линейная во втором слагаемом.

Таким образом, для физически реалистичных ситуаций уравнение (1.25) практически без потери точности может быть приведено к упрощенному виду

$$\Theta \approx \frac{n_0 \dot{L}^2}{8 D_{12} \gamma} t + \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} Z + \frac{1}{2} \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} Z^2 . \qquad (1.29)$$

Из этого выражения видно, что пространственная часть поля Θ имеет вид

$$\theta(z) \sim 10^2 \mathrm{K} Z + 10^5 \mathrm{K} Z$$

Видно, что даже при максимальном достижимом по мере удаления от поверхности кипения перегреве, не допускающем объемного закипания компонент, $\theta(z) \sim 10\mathrm{K}$ безразмерный комплекс $Z \sim 10^{-2}$, т.е. остается мал. При перегреве θ большем $0.1\ \mathrm{K}$ квадратичное слагаемое дает основной вклад.

1.2.3. Связь кинетики парового слоя со средними макроскопическими показателями поля: срыв парового слоя в случае хорошо перемешанной системы

В отличие от предыдущего раздела, где осуществлялось строгое решение задачи о росте парового слоя, рассмотрение в данном разделе носит оценочный характер и имеет своей целью анализ связи основных результатов работы, полученных в разделе 1.2.2, с наблюдаемыми характеристиками и управляющими параметрами системы.

В данном разделе рассматривается установившийся режим кипения. Такой режим может быть описан в терминах среднего притока тепла в систему, соответствующего среднего перегрева системы и скорости парообразования. Геометрические параметры системы можно считать неизменными.

При рассмотрении процесса срыва парового слоя имеет смысл рассмотреть две ситуации: случай устойчиво стратифицированной системы (как на рисунках

1.1 и 1.2), и случай, когда рассматриваемая система хорошо перемешана в процессе кипения. В стратифицированной системе срыв парового слоя обуславливается развитием неустойчивости Релея-Тейлора на верхней границе контакта жидкость–газ, эта задача представляет собой самостоятельный интерес и в силу своей громоздкости вынесена в отдельную главу (см. главу 2), поэтому далее будет рассмотрена задача для хорошо перемешанной системы.

Важным геометрическим параметром смеси двух жидкостей является средняя площадь их контакта в единице объема смеси $\delta S / \delta V$. Данная величина зависит от параметров жидкостей, ее оценка приведена в приложении А.

Внимание настоящей работы сфокусировано на мезоскопической проблеме описания роста парового слоя — макроскопические же параметры системы полагаются заданными (описание макроскопических процессов в системе рассмотрено, например, в [86–89]).

В данном разделе рассматриваются системы, где объемы обеих компонент сопоставимы, т.е. обе фазы равноправны, нет выделенной основной и гостевой фаз. Система полагается достаточно хорошо перемешанной процессом кипения, чтобы можно было считать ее статистически изотропной и однородной [90].

Характерной шириной окрестности парового слоя, за пределами которой начинается окрестность другого слоя, является

$$2H \sim \left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)^{-1}.$$

Характерное расстояние изменения ориентации поверхности контакта в хорошо перемешанной системе имеет тот же порядок величины $2H$.

Различие случая кипения ниже температуры объемного закипания обеих компонент и случая, когда более летучая компонента перегрета выше

температуры своего объемного кипения, сводится к особенностям процесса роста парового слоя и теплопереноса в его окрестности. На макроскопическом же уровне процессы для этих двух случаев должны протекать подобным образом. Для последнего случая качественная картина протекания процесса кипения хорошо известна из экспериментов [4–11, 90]. В процессе испарения на границе контакта происходит формирование пузырьков пара, которые в некоторый момент времени отрываются от этой границы (рисунок 1.4).

Под действием силы тяжести на жидкость, в паровом слое может возникать вязкое течение Пуазейля. На ранних стадиях роста парового слоя, когда его ширина близка к нулю, поток течения Пуазейля оказывается несущественен, но при достижении растущим слоем некоторой достаточно большой толщины происходит срыв массы пара вдоль слоя с формированием пузырька, который всплывает, отделившись от кипящей границы. Таким образом происходит "обнуление" парового слоя, и процесс роста парового слоя начинается сначала.

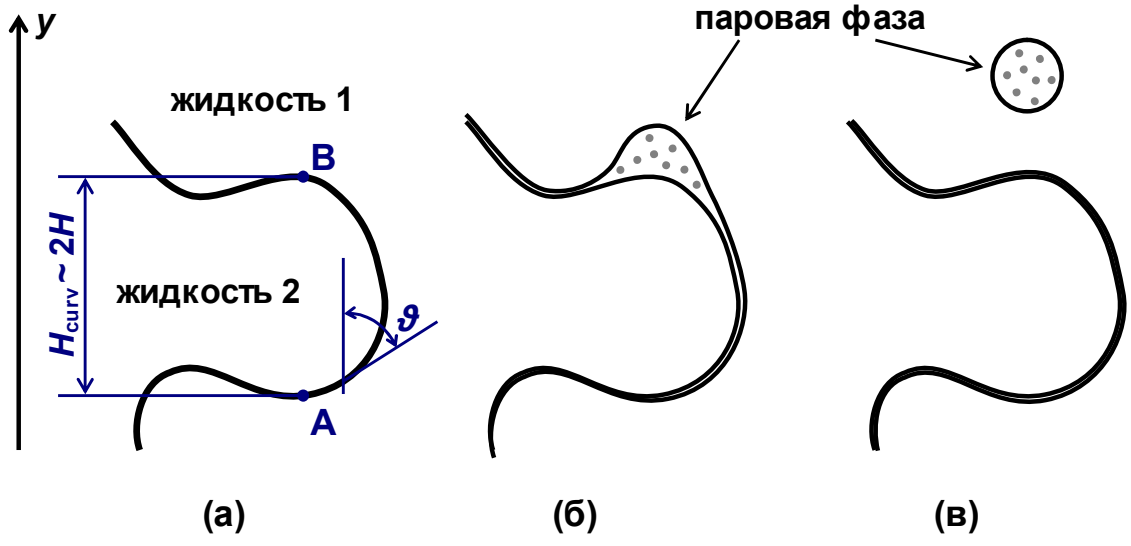


Рисунок 1.4. Формирование пузырьков на границе контакта двух жидкостей

Интерес представляет оценка характерного времени обновления парового слоя, то есть промежутка времени с момента начала зарождения парового слоя до

его срыва. Рассмотрим растущий участок парового слоя высотой $2H$ (на рисунке 1.4.а участок АВ); на масштабах этой высоты происходит существенное изменение наклона поверхности контакта. Длина соответствующего участка вдоль границы контакта l связана с $2H$ следующим образом:

$$dy = \cos\vartheta dl,$$

где y — вертикальная координата, ϑ — угол отклонения поверхности контакта от вертикали. Так как система полагается статистически изотропной, среднее значение $\left\langle\left|\cos\vartheta\right|\right\rangle = 1/2$ и $2H \approx \left\langle\left|\cos\vartheta\right|\right\rangle l = l/2$.

Обозначим вклад течения Пуазейля в скорость роста толщины парового слоя $\dot{L}_P$. Для вклада $\dot{L}_P$ на участке длиной l вдоль потока течения Пуазейля требуется, чтобы поток в конце участка АВ давал $\int_{-L/2}^{L/2} v_l(x_n)\,|_{\text{B}}\; dx_n = -l\dot{L}_p$, где v_l — скорость течения пара вдоль парового слоя, x_n — поперечная к слою координата, измеряемая от середины слоя. На начальных стадиях формирования парового слоя его толщина мала по сравнению с радиусом кривизны, и профиль течения Пуазейля имеет вид, соответствующий стационарному течению между параллельными плоскостями:

$$v_l(x_n) = \frac{1}{2\eta_g}\left(-\frac{dp}{dl}\right)\left(\frac{L^2}{4} - x_n^2\right),$$

где η_g — динамическая вязкость пара. Для градиента давления имеем

$$\left|\frac{dp}{dl}\right| \approx \left\langle\left|\cos\vartheta\right|\right\rangle\left|\frac{dp}{dy}\right| \approx \frac{1}{2}\left|\frac{dp}{dy}\right|.$$

В условиях перемешивания системы динамическая часть градиента давления, связанная с ускорением частиц жидкости, отлична от нуля. Поскольку перемешивающее течение индуцировано силой тяжести, эта часть должна быть соизмерима с гидростатическим вкладом в градиент давления — можно полагать $dp / dy \sim \rho_l g$, где g — ускорение свободного падения. В итоге, в связи с эффектом просачивания пара вдоль парового слоя имеем вклад в скорость изменения толщины этого слоя:

$$\dot{L}_P \approx -\frac{\rho_l g L^3}{96\eta_g H} \approx -\frac{1}{48}\frac{\rho_l g L^3}{\eta_g}\left(\frac{\delta S}{\delta V}\right). \qquad (1.30)$$

Из этого выражения видно, что $\dot{L}_P$ действительно сильно зависит от толщины слоя, $\dot{L}_P \sim L^3$, в то время как рост за счет испарения происходит с постоянной скоростью. С учетом этого, на ранних стадиях роста просачиванием можно пренебречь и полагать, что срыв пузыря происходит в тот момент, когда вклад течения Пуазейля в скорость роста парового слоя $\dot{L}_P$ уравнивается с вкладом за счет испарения. Таким образом, на основании уравнения (1.30), предельная толщина парового слоя L_*, достигаемая перед срывом пузыря, может быть связана со скоростью роста парового пузыря за счет испарения:

$$L_* \approx \left(\frac{48\eta_g}{\rho_l g(\delta S / \delta V)}\dot{L}\right)^{1/3}. \qquad (1.31)$$

Это выражение является приблизительным, в точном выражении для L_* в скобке должен присутствовать дополнительный безразмерный множитель порядка единицы, учитывающий особенности геометрии системы и протекающих процессов.

Можно оценить время, за которое паровой слой вырастает до этой величины, то есть время от зарождения парового слоя до его срыва:

$$t_* = \frac{L_*}{\dot{L}} \approx \left(\frac{48\eta_g}{\rho_l g(\delta S \,/\, \delta V)} \right)^{1/3} \dot{L}^{-2/3}. \qquad (1.32)$$

Следует заметить, что при срыве пузырька пара в его окрестности остается небольшой локальный перегрев жидкости, описываемый линейным по времени слагаемым в уравнении (1.29). Для начала будем считать, что количеством тепла, связанным с этим остаточным избыточным перегревом, можно пренебречь на фоне остальных вкладов в баланс превращений тепла в системе. Если это предположение справедливо, то после обновления слоя остаточный избыточный перегрев способен привести к формированию лишь небольшого парового слоя, т.е. система может прийти в состояние, близкое к решению (1.29) на ранней стадии роста парового слоя, когда $L \ll L_*$.

Из уравнений (1.29) и (1.32) могут быть вычислены характерные значения максимального перегрева системы, соответствующего температуре на наибольшем удалении между паровыми слоями в момент срыва пузырька пара

$$\begin{aligned} \Theta_{\max} &\approx \frac{n_0 \dot{L}^2}{8 D_{12}\gamma} t_* + \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} Z_{\max} + \frac{1}{2}\frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12}\gamma} Z_{\max}^2 \\ &= \frac{2\chi_2 n_{l2}}{D_{12}\gamma} \left(\frac{3\eta_g \chi_2}{\rho_g g} \right)^{1/3} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) Z_{\max}^{4/3} + \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} Z_{\max} + \frac{1}{2}\frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12}\gamma} Z_{\max}^2, \end{aligned} \qquad (1.33)$$

где

$$Z_{\max} = Z(z = H) = \frac{n_0}{n_{l2}} \frac{\dot{L}}{4\chi_2 (\delta S \,/\, \delta V)}, \qquad (1.34)$$

и усредненного по пространству и времени значения перегрева

$$\begin{aligned}\left\langle \Theta \right\rangle &\approx \frac{n_0 \dot{L}^2}{8 D_{12} \gamma} \frac{t_*}{2} + \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} \frac{Z_{\max}}{2} + \frac{1}{2} \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} \frac{{Z_{\max}}^2}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \chi_2 n_{l2}}{D_{12} \gamma} \left(\frac{3 \eta_g \chi_2}{\rho_g g} \right)^{1/3} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) {Z_{\max}}^{4/3} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}} Z_{\max} + \frac{1}{6} \frac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma} Z_{\max}^2 .\end{aligned} \tag{1.35}$$

Проведем оценки для реальных веществ: воды

$$\Theta_{\max}^{(\mathrm{H_2O})} \approx 0.27(\mathrm{К/м})\ (\delta S \,/\, \delta V) {Z_{\max}}^{4/3} + 5.4 \cdot 10^2 \mathrm{К}\ Z_{\max} + 1.0 \cdot 10^6 \mathrm{К}\ Z_{\max}^2 ,$$

и *н*-гептана (см. таблицу 1.1)

$$\Theta_{\max}^{(\mathrm{n\text{-}C_7H_{16}})} \approx 0.0045(\mathrm{К/м})\ (\delta S \,/\, \delta V) {Z_{\max}}^{4/3} + 1.3 \cdot 10^2 \mathrm{К}\ Z_{\max} + 0.7 \cdot 10^4 \mathrm{К}\ Z_{\max}^2 .$$

Таблица 1.1. Физические свойства и параметры системы для воды и *н*-гептана при температуре их объемного кипения и атмосферном давлении

	H_2O	*н*-гептан
Температура объемного кипения [K]	373.15	371.58
$\mathcal{L}_2$ [Дж/кг]	$2.26 \cdot 10^6$	$3.17 \cdot 10^5$
$c_{p,l2}$ [Дж/(кг К)]	$4.22 \cdot 10^3$	$2.50 \cdot 10^3$
χ_2 [м^2/с]	$1.70 \cdot 10^{-7}$	$0.66 \cdot 10^{-7}$
ρ_{l2} [кг/м^3]	$0.96 \cdot 10^3$	$0.61 \cdot 10^3$
ρ_g [кг/м^3]	0.63	2.50
$\dfrac{\gamma}{n^{(0)}} = \dfrac{2\gamma}{n_0}$ [1/K]	0.039	0.056
D_{12} (для пары веществ) [м^2/с]	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$
η_g [кг/(м с)]	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$0.74 \cdot 10^{-5}$
$n_0 \,/\, n_{l2}$	$0.66 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
$\mathcal{L}_2 \,/\, c_{p,l2}$ [K]	$5.4 \cdot 10^2$	$1.3 \cdot 10^2$
$\dfrac{{n_{l2}}^2 \chi_2}{2 n_0 D_{12} \gamma}$ [K]	$1.0 \cdot 10^6$	$0.70 \cdot 10^4$
$\dfrac{n_0}{4 \chi_2 n_{l2}}$ [с/м^2]	$0.10 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^4$
$\dfrac{2\chi_2 n_{l2}}{D_{12}\gamma}\left(\dfrac{3\eta_g \chi_2}{\rho_g g}\right)^{1/3}$ [К/м]	0.27	$0.45 \cdot 10^{-2}$

Вернемся к вопросу о правомерности пренебрежения остаточным избыточным перегревом сразу после обновления парового слоя. В отсутствии парового слоя локальный перегрев выше минимальной температуры кипения смеси T_* означает локальное нарушение термодинамического равновесия, к которому система быстро возвращается за счет потери теплоты перегрева на испарение вещества в паровой слой. С точностью до порядка величин, можно полагать, что состояние с однородным вкладом в температуру $(n_0\dot{L}^2 t_*)/(8D_{12}\gamma)$ и отсутствующим паровым слоем $L=0$ переходит в состояние (1.29) нового растущего слоя, соответствующее некоторому моменту t_0, вместо $t=0$, как было бы в случае отсутствия этого перегрева. Стадия роста слоя t_0 может быть оценена из условия баланса (поскольку пространственная часть выражения (1.29) одинакова на разных стадиях роста) теплоты перегрева H-окрестности слоя и теплоты испарения в слой:

$$c_{p,l2}\rho_{l2}\cdot\frac{n_0\dot{L}^2 t_*}{8D_{12}\gamma}\cdot 2H\cdot\delta S+0=c_{p,l2}\rho_{l2}\cdot\frac{n_0\dot{L}^2 t_0}{8D_{12}\gamma}\cdot 2H\cdot\delta S+\Lambda_2 n_0\cdot\dot{L}t_0\cdot\delta S,$$

откуда

$$\frac{t_0}{t_*}=\left(1+\frac{\mathcal{L}_2}{c_{p,l2}}\frac{8D_{12}\gamma}{n_{l2}}\frac{(\delta S/\delta V)}{\dot{L}}\right)^{-1}. \qquad (1.36)$$

Для оценки правомерности пренебрежения остаточным перегревом введем параметр r, характеризующий отношение величины линейного по времени вклада в перегрев на стадии роста t_0 по сравнению с характерным перегревом системы $\Theta_{\max}$:

$$r = \frac{1}{\Theta_{\max}} \frac{n_0 \dot{L}^2}{8 D_{12} \gamma} t_0 = \frac{1}{\Theta_{\max}} \frac{2 \chi_2 n_{l2}}{D_{12} \gamma} \left(\frac{3 \eta_g \chi_2}{\rho_g g} \right)^{1/3} \frac{\delta S}{\delta V} Z_{\max}^{4/3} \frac{t_0}{t_*} . \qquad (1.37)$$

На основе уравнения (1.33) можно вычислить для заданного максимального перегрева $\Theta_{\max}$ значение $Z_{\max}$. Далее, уравнение (1.34) позволяет вычислить отношение $\dot{L} / (\delta S / \delta V)$. Для вычисления отношения r (1.37) остается определить параметр $(\delta S / \delta V)$, оценка этого параметра приведена в приложении А. На рисунке 1.5 представлена зависимость r от $\Theta_{\max}$ для материальных параметров воды и *н*-гептана (см. таблицу 1.1) при $(\delta S / \delta V)^{-1} = 0.01$ м.

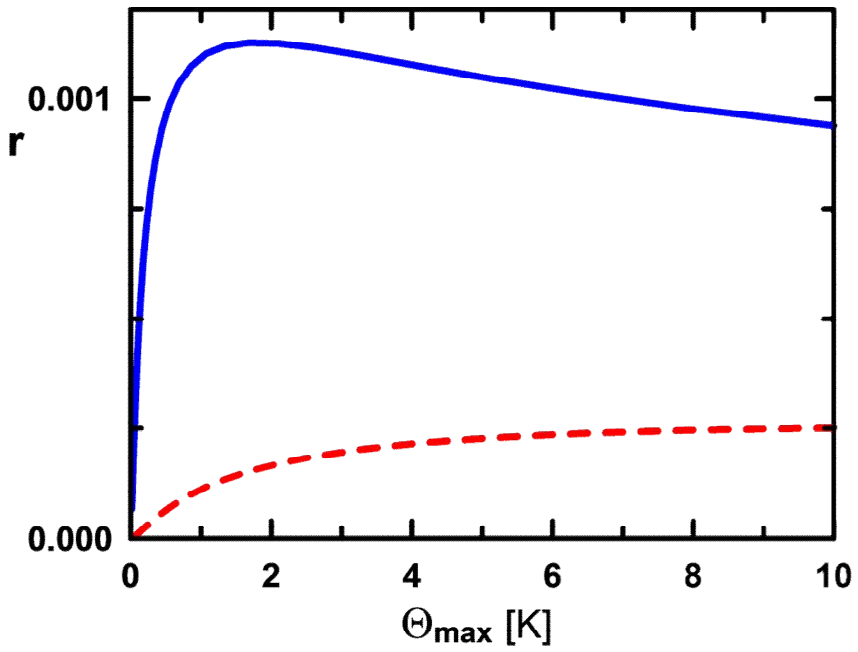


Рисунок 1.5. Параметр r как функция максимального перегрева в системе для случаев физических параметров воды (сплошная линия) и *н*-гептана (пунктирная линия) при $(\delta S / \delta V)^{-1} = 0.01$ м.

При увеличении и уменьшении параметра $(\delta S / \delta V)$ в n раз происходит приблизительно сжатие и растяжение графиков n раз по вертикали, т.е. для

реалистичных значений параметров системы отношение r остается малым, и остаточным перегревом действительно можно пренебрегать.

Средний по времени и пространству перегрев можно определить из уравнения (1.35).

1.2.4. Парообразование при постоянном притоке тепла

Для описания процесса роста парового слоя удобнее использовать реальные макроскопические характеристики системы, например, приток тепла, приходящийся на единицу объема смеси за единицу времени,

$$q_V = \frac{\delta Q}{\delta V \delta t}.$$

Тогда на единицу площади поверхности контакта приходится приток тепла $q_S = (\delta S / \delta V)^{-1} q_V$. Поскольку рассматривается установившийся процесс кипения, то статистические характеристики поля температуры в системе не меняются со временем, и все приходящее тепло должно расходоваться на парообразование: $q_S = \Lambda_2 n_0 \dot{L}$. Тогда уравнение (1.34) переписывается в виде

$$Z_{\max} = \frac{q_V}{4\rho_{l2}\mathcal{L}_2\chi_2(\delta S / \delta V)^2}. \qquad (1.38)$$

На основании (1.38) могут быть вычислены максимальный (1.33) и средний перегрев (1.35) в системе.

1.2.5. Динамика остывания системы в отсутствие притока тепла

В этом разделе будут приведены оценки того, как происходит процесс остывания системы двух перемешанных жидкостей в отсутствие притока тепла. Интерес представляет случай, когда температура остывающей системы остается

выше T_*. Поскольку источником энергии для парообразования служит только теплота, связанная с перегревом жидкой фазы $\theta \equiv \left\langle \Theta \right\rangle$, то

$$q_V = -\rho_{l2} c_{p,l2} \dot{\theta},$$

и уравнение (1.38) принимает вид

$$Z_{\max} = -\frac{c_{p,l2}}{\mathcal{L}_2} \frac{\dot{\theta}}{4\chi_2 (\delta S / \delta V)^2}. \qquad (1.39)$$

С учетом (1.39) уравнение (1.35) принимает вид:

$$\theta = \beta_{4/3} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) \left(\frac{-\dot{\theta}}{(\delta S / \delta V)^2} \right)^{4/3} + \beta_1 \frac{-\dot{\theta}}{(\delta S / \delta V)^2} + \beta_2 \left(\frac{-\dot{\theta}}{(\delta S / \delta V)^2} \right)^2, \quad (1.40)$$

где выражения для коэффициентов β_i определяются из сопоставления последнего уравнения с уравнениями (1.39) и (1.35). Для точного описания реальной динамики системы важен учет зависимости $(\delta S / \delta V)$ от температуры перегрева (очевидно, что чем интенсивнее происходит процесс парообразования, тем интенсивнее перемешивание в системе и характеристика $(\delta S / \delta V)$ увеличивается).

На начальной стадии остывания, когда перегрев системы еще достаточно большой, наибольший вклад в правую часть уравнения (1.40) вносит квадратичное по $\dot{\theta}$ слагаемое. Т.е.

$$\theta \approx \beta_2 \left(\frac{-\dot{\theta}}{(\delta S / \delta V)^2} \right)^2. \qquad (1.41)$$

Пренебрегая изменением параметра $(\delta S / \delta V)$ со временем, можно вычислить время, за которое θ достигнет малых значений (в таком приближении θ достигает нулевого значения за конечное время):

$$\tau_2 = \frac{2\sqrt{\beta_2 \left\langle \Theta \right\rangle_{t=0}}}{(\delta S / \delta V)^2} = \frac{n_{l2} c_{p,l2}}{4\mathcal{L}_2 (\delta S / \delta V)^2} \sqrt{\frac{\left\langle \Theta \right\rangle_{t=0}}{3\chi_2 n_0 D_{12} \gamma}}. \qquad (1.42)$$

Для воды и *н*-гептана (см. таблицу 1.1) это составляет

$$\tau_2^{(\mathrm{H_2O})} \approx 2.3 \cdot 10^6 (\text{с м}^{-2}\text{К}^{-1/2}) \, (\delta S / \delta V)^{-2} \left\langle \Theta \right\rangle_{t=0}^{1/2}$$

и

$$\tau_2^{(\text{n-}\mathrm{C_7H_{16}})} \approx 2.0 \cdot 10^6 (\text{с м}^{-2}\text{К}^{-1/2}) \, (\delta S / \delta V)^{-2} \left\langle \Theta \right\rangle_{t=0}^{1/2},$$

соответственно. При $(\delta S / \delta V)^{-1} \sim 1$ мм $- 1$ см продолжительность фазы быстрого остывания оказывается $\tau_2 \sim 1$ с $- 1$ мин.

По прошествии некоторого времени перегрев в системе уменьшается, и в правой части уравнения (1.40) доминирующий вклад начинает вносить линейное по $\dot{\theta}$ слагаемое:

$$\theta \approx \beta_1 \frac{-\dot{\theta}}{(\delta S / \delta V)^2}. \qquad (1.43)$$

Если бы степень перемешаности системы не успевала подстраиваться под интенсивность процесса парообразования и $(\delta S / \delta V)$ оставалось неизменным со временем, затухание степени перегрева носило бы экспоненциальный характер $\theta \sim \exp(-t / \tau_1)$ с характерным временем

$$\tau_1 = \frac{\beta_1}{(\delta S / \delta V)^2} = \frac{1}{8\chi_2(\delta S / \delta V)^2}. \qquad (1.44)$$

Для воды и *н*-гептана при $(\delta S / \delta V)^{-1} \sim 1$ мм $- 1$ см время $\tau_1 \sim 1$ с $- 1$ мин сопоставимо с временем τ_2.

Эту фазу остывания можно считать бесконечно медленной, так как интенсивность парообразования снижается со временем, тем самым снижая параметр $(\delta S / \delta V)$. При бесконечно медленном парообразовании $(\delta S / \delta V)$ не обращается в строгий нуль, а достигает некоторого минимального значения $(\delta S / \delta V)_{\min}$, соответствующего стратифицированному состоянию с практически плоской горизонтальной границей раздела между легкой и тяжелой жидкостями. На этой стадии температура перегрева затухает экспоненциально с характерным временем

$$\tau_{1,\infty} = \frac{1}{8\chi_2(\delta S / \delta V)^2_{\min}}. \qquad (1.45)$$

До тех пор, пока система остается существенно перемешенной, т.е. $(\delta S / \delta V) \gg (\delta S / \delta V)_{\min}$, для зависимости $(\delta S / \delta V)$ от $\dot{\theta}$ можно предположить эмпирическую степенную зависимость $(\delta S / \delta V) \sim (-\dot{\theta})^r$, не учитывающую ограничение на $(\delta S / \delta V)$ снизу. Показатель степени $0 < r < 1/2$; условие $r < 1/2$ связано с тем, что для физически реалистичных ситуаций уравнение (1.43) должно давать положительные $d(-\dot{\theta}) / d\theta$. В этом случае уравнение (1.43) дает $\theta \sim (t - t_0)^{-[1/(2r)-1]}$, т.е. процесс остывания является полиномиально медленным.

Таким образом, в отсутствии притока тепла процесс остывания перегретой системы за счет парообразования происходит в несколько стадий:

1. Быстрое остывание, описываемое уравнением (1.41) за время τ_2 (1.42), зависящее от первоначальной степени перегрева системы.
2. Полиномиально медленное остывание, описываемое уравнением (1.43) с характерным временем τ_1 (1.44).
3. Медленное экспоненциальное остывание, при котором основную часть времени система стратифицирована и граница раздела остается приблизительно плоской. Характерное время остывания системы на этой стадии $\tau_{1,\infty}$ (1.45).

1.3. Кипение жидкостей с произвольными физическими параметрами

1.3.1. Эволюция парового слоя

В отличие от предыдущего раздела, в котором рассматривался процесс кипения на границе раздела двух жидкостей с близкими материальными параметрами, в следствие чего систему можно было считать зеркально симметричной, в этом разделе описывается наиболее общий случай и не вводится никаких ограничений относительно физических свойств жидкостей. Схематическое изображение системы несмешивающихся жидкостей представлено на рисунке 1.3.

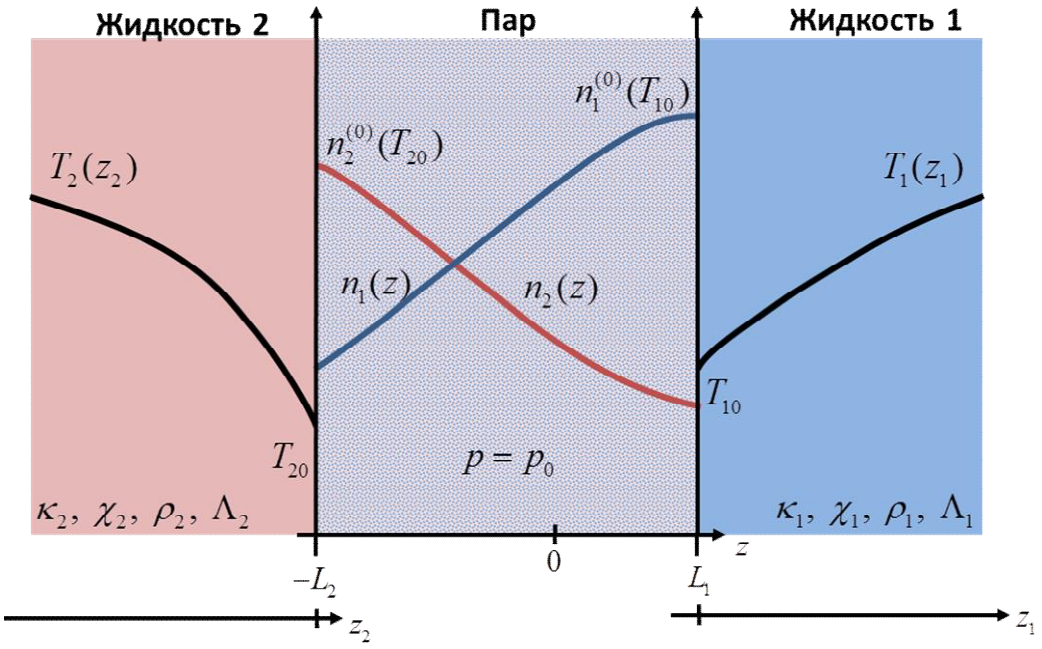


Рисунок 1.6. Система двух несмешивающихся жидкостей. В процессе испарения между ними образуется растущий паровой слой.

Для удобства описания в системе введено три координатных оси: две независимых оси для жидких фаз z_1 и z_2, нуль в которых расположен на соответствующих границах раздела жидкость–газ, и ось z — в газовой фазе, находящейся в пределах интервала от $-L_2$ и L_1. Физическая модель процесса строится на основании положений, схожих с используемыми в разделе 1.2.1:

1. Температура внутри жидких фаз неоднородна, что обеспечивает приток тепла к границе, с которой происходит испарение.
2. Масса жидкой фазы в процессе испарения уменьшается, и поверхность раздела сдвигается вглубь жидкости.
3. Обе жидкости испаряются в паровую прослойку, образуемую между ними. Так как жидкости взаимно нерастворимы, молекулы одного вещества не переходят из газовой фазы в жидкую фазу второй жидкости. Концентрация частиц компоненты газа сразу над поверхностью его жидкой фазы n_j

($j = 1,2$) равна концентрации частиц насыщенного пара этого вещества $n_j^{(0)}$ при локальной температуре $T = T_* + \Theta$. В выбранных координатах,

$$n_2(z = -L_2) = n_2^{(0)}(T), \quad n_1(z = L_1) = n_1^{(0)}(T).$$

4. Давление внутри газовой фазы постоянно и равно атмосферному, так как механическая инерция системы существенно меньше тепловой и диффузионной «инерции».
5. Общая концентрация частиц газа в слое подчиняется закону идеального газа

$$n_1 + n_2 = n_0 = \frac{p_0}{k_B T},$$

где T — локальная температура. Суммарная концентрация частиц n_0 зависит от температуры гораздо слабее, чем $n_{1,2}$ и можно полагать

$$n_1 + n_2 = n_{0*} = \frac{p_0}{k_B T_*}. \qquad (1.46)$$

Для того, чтобы началось кипение на границе контакта, необходимо превысить минимальную температуру кипения T_*:

$$T = T_* + \Theta, \qquad \Theta > 0.$$

Как и в предыдущем разделе, наибольший интерес представляет случай небольшого отклонения температуры системы от T_*. Тогда зависимость концентрации насыщенных паров от температуры можно линеаризовать вблизи T_*:

$$n_j^{(0)}(T_* + \Theta) = n_{j*}^{(0)} + \gamma_j \Theta + \ldots, \qquad (1.47)$$

где $n_{j*}^{(0)} \equiv n_j^{(0)}(T_*)$ и $\gamma_j \equiv (\partial n_j^{(0)} / \partial T)_{T=T_*}$. Допустимость использования подобных приближений подробно рассмотрена в разделе 1.2.1, она не зависит от материальных параметров рассматриваемых жидкостей.

Внутри газового слоя распределение частиц обеих компонент подчиняется закону Фика:

$$\vec{J}_j = -D_{12} \nabla n_j, \tag{1.48}$$

где D_{12} — коэффициент взаимной диффузии. Зависимость этого коэффициента от температуры носит полиномиальный характер, поэтому ей можно пренебречь. Таким образом, эволюция концентраций частиц j-й компоненты имеет вид:

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = \nabla \cdot (D_{12} \nabla n_j) = D_{12} \frac{\partial^2 n_j}{\partial z^2}. \tag{1.49}$$

Граничными условиями служат линеаризованные зависимости $n_j^{(0)}(T)$:

$$n_1 \big|_{z=L_1} = n_{1*}^{(0)} + \gamma_1 \Theta, \tag{1.50}$$

$$n_2 \big|_{z=-L_2} = n_{2*}^{(0)} + \gamma_2 \Theta. \tag{1.51}$$

В соответствии с (1.46), граничные условия принимают вид

$$n_2 \big|_{z=L_1} = n_{2*}^{(0)} - \gamma_1 \Theta, \tag{1.52}$$

$$n_1 \big|_{z=-L_2} = n_{1*}^{(0)} - \gamma_2 \Theta. \tag{1.53}$$

На границе жидкость–газ должно выполняться условие баланса молекулярного потока, которое, в свою очередь, определяет скорость роста

парового слоя. Изменение числа частиц одного типа вблизи границы пара с жидкостью второго типа обуславливается только диффузионным транспортом. Таким образом, если толщина парового слоя вследствие испарения жидкости 2 увеличилась на δL_2 за отрезок времени δt, молекулы вещества 1 проникнут в этот добавочный слой δL_2 только путем диффузионного притока из глубины парового слоя, т.е.

$$n_1\Big|_{z=-L_2}\delta L_2 = D_{12}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=-L_2}\delta t,$$

$$n_2\Big|_{z=L_1}\delta L_1 = -D_{12}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=L_1}\delta t.$$

Таким образом,

$$\dot{L}_2 = \frac{D_{12}}{n_1\Big|_{z=-L_2}}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=-L_2} \approx \frac{D_{12}}{n_{1*}^{(0)}}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=-L_2}, \qquad (1.54)$$

$$\dot{L}_1 = -\frac{D_{12}}{n_2\Big|_{z=L_1}}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=L_1} \approx -\frac{D_{12}}{n_{2*}^{(0)}}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=L_1}, \qquad (1.55)$$

где точкой обозначена производная по времени. В ведущем порядке малости поправками порядка $\delta n_j^{(0)} / n_j^{(0)}$ можно пренебречь. Для полной толщины слоя $L = L_1 + L_2$,

$$\dot{L} = D_{12}\left(\frac{1}{n_{1*}^{(0)}}\frac{\partial n_1}{\partial z}\Big|_{z=-L_2} - \frac{1}{n_{2*}^{(0)}}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=L_1}\right). \qquad (1.56)$$

Обозначим v_{lj} скорость смещения j-й жидкости относительно ее границы в процессе испарения ($v_{l1} < 0$, $v_{l2} > 0$). Рассмотрим границу жидкость 2 – пар. За время δt с площади S на поверхности этой границы испарится $n_{l2} \cdot S \cdot (v_{l2}\delta t)$ молекул, где n_{l2} — концентрация частиц типа 2 в жидкой фазе. Испарившиеся частицы частично заполнят образовавшийся слой δL_2 в газовой фазе и частично проникнут вглубь парового слоя вследствие диффузионного оттока. Т.е.

$$n_{l2} S v_{l2} \delta t = n_2^{(0)}\Big|_{z=-L_2} S\delta L_2 - D_{12}\frac{\partial n_2}{\partial z}\Big|_{z=-L_2} S\delta t.$$

Так как $dn_2 = -dn_1$ (см. (1.46)), градиент концентрации частиц на границе $z = -L_2$ может быть получен из выражения (1.55), тогда в ведущем порядке малости предыдущее выражение дает

$$v_{l2} \approx \frac{n_{0*}}{n_{l2}}\dot{L}_2; \tag{1.57}$$

аналогично,

$$v_{l1} \approx -\frac{n_{0*}}{n_{l1}}\dot{L}_1. \tag{1.58}$$

Рассмотрим энергетический баланс в системе. Для тепла Q_S, подводимого к единице площади границы контакта со стороны жидкости, справедливо

$$\dot{Q}_S = \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1}\Big|_{z_1=0} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial z_2}\Big|_{z_2=0}, \tag{1.59}$$

где κ_i — коэффициент теплопроводности. С другой стороны, все поступающее тепло расходуется на испарение жидкости с поверхности контакта;

$$\dot{Q}_S = \Lambda_1 n_{l1}(-v_{l1}) + \Lambda_2 n_{l2} v_{l2}\,, \tag{1.60}$$

где Λ_j — теплота парообразования в расчете на одну молекулу. Введем параметр, характеризующий неравномерность подвода тепла с двух сторон,

$$\dot{q}_S = \kappa_1 \left.\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} - (-\kappa_2 \left.\frac{\partial T_2}{\partial z_2}\right|_{z_2=0}).$$

Тогда условия для температуры на границах раздела принимают вид

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} = +\frac{1}{2\kappa_1}\left(\dot{Q}_S + \dot{q}_S\right), \tag{1.61}$$

$$\left.\frac{\partial T_2}{\partial z_2}\right|_{z_2=0} = -\frac{1}{2\kappa_2}\left(\dot{Q}_S - \dot{q}_S\right). \tag{1.62}$$

Внутри жидкости (подобно предыдущему случаю) теплоперенос описывается уравнением

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + v_{lj}\frac{\partial T_j}{\partial z_j} = \chi_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial z_j^2}, \tag{1.63}$$

где χ_j — коэффициент температуропроводности j-й жидкости.

Таким образом, эволюция парового слоя, возникающего в процессе кипения границы двух несмешивающихся жидкостей с произвольными материальными параметрами, полностью описывается уравнениями (1.49) и (1.63) с граничными

условиями (1.50)–(1.53) и (1.61), (1.62), где $\dot{L}$ определяется уравнением (1.56), v_{lj} — уравнением (1.57) и (1.58), $\dot{Q}_S$ — уравнением (1.60).

1.3.2. Решение уравнения эволюции парового слоя

Как показано в приложении В, уравнение (1.49) с граничными условиями (1.50)–(1.53) допускает решение для концентраций с близкой к линейной зависимостью от величины перегрева:

$$n_1(z,t) = n_{1*}^{(0)} - \gamma_2\Theta(t) + \alpha(z + L_2(t)) + O_1\left(\frac{(\alpha L)^2}{n_{0*}}\right), \tag{1.64}$$

$$n_2(z,t) = n_{2*}^{(0)} - \gamma_1\Theta(t) - \alpha(z - L_1(t)) + O_2\left(\frac{(\alpha L)^2}{n_{0*}}\right), \tag{1.65}$$

где

$$\alpha = (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{\Theta(t)}{L(t)}$$

практически постоянна по времени, $\Theta(t) \sim t$, $L(t) \sim t$. Для таких профилей концентрации уравнения (1.54)–(1.56) принимают вид

$$\dot{L}_1 = \frac{D_{12}\alpha}{n_{2*}^{(0)}}, \tag{1.66}$$

$$\dot{L}_2 = \frac{D_{12}\alpha}{n_{1*}^{(0)}}, \tag{1.67}$$

$$L = \frac{n_{0*}}{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}} D_{12}\alpha t\,, \tag{1.68}$$

уравнение (1.60) преобразуется в

$$\dot{Q}_S = (\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)})\dot{L}. \qquad (1.69)$$

В последующем изложении для краткости будет рассматриваться вторая жидкость, теория для первой жидкости может быть построена аналогичным образом. Поведение этой подсистемы описывается уравнением (1.63) с граничными условиями (1.62) и

$$\Theta_2\Big|_{z=-L_2} = \Theta = \frac{\alpha L}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Эта система уравнений может быть решена способом, аналогичным приведенному ранее в разделе 1.2.2 при рассмотрении процесса кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей с близкими параметрами. Решение будет искаться в виде

$$\Theta_2(z_2, t) = Ct + \theta(z_2).$$

Тогда для $z_2 \le 0$ получаем

$$\Theta_2 = Ct + \frac{C}{v_{l2}} \mid z_2 \mid + \frac{\chi_2}{v_{l2}}\left(\frac{\dot{Q}_S - \dot{q}_S}{2\kappa_2} - \frac{C}{v_{l2}}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{v_{l2}}{\chi_2} \mid z_2 \mid\right)\right], \qquad (1.70)$$

где

$$C = \frac{D_{12}}{\gamma_1 + \gamma_2}\frac{n_{0*}}{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}}\alpha^2.$$

Для удобства представления можно ввести безразмерный параметр

$$Z_2 = \frac{v_{l2}}{\chi_2} \mid z_2 \mid = \frac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}}\frac{\dot{L}}{\chi_2} \mid z_2 \mid. \qquad (1.71)$$

Тогда уравнение (1.70) примет вид

$$\Theta_2 = Ct + \frac{\chi_2}{v_{l2}} \frac{\dot{Q}_S - \dot{q}_S}{2\kappa_2}(1 - e^{-Z_2}) + C\frac{\chi_2}{v_{l2}^2}(Z_2 - 1 + e^{-Z_2}). \qquad (1.72)$$

Как было показано в разделе 1.2.2, характерные значения амплитуды второго и третьего слагаемого в правой части этого уравнения для реальных жидкостей велики, например, для воды они составляют $10^2\,\mathrm{K}$ и $10^5\,\mathrm{K}$, соответственно, в то время как перегрев системы Θ_2 не превышает $10{-}20\,\mathrm{K}$. Таким образом, параметр Z_2 должен быть мал. Из тех же соображений, что были приведены в разделе 1.2.2, уравнение (1.72) можно упростить и представить в следующем виде

$$\Theta_2 \approx Ct + \frac{\chi_2}{v_{l2}} \frac{\dot{Q}_S - \dot{q}_S}{2\kappa_2} Z_2 + \frac{C}{2}\frac{\chi_2}{v_{l2}^2} Z_2^2. \qquad (1.73)$$

Так же как и в случае жидкостей с близкими параметрами, пространственная часть перегрева имеет структуру

$$\theta(z) \sim 10^2\,\mathrm{K} \times Z_2 + 10^5\,\mathrm{K} \times Z_2^2.$$

Для небольших значений перегрева, меньших $0.1\,\mathrm{K}$, основной вклад в $\theta(z)$ вносит линейное по Z_2 слагаемое, в случае большего перегрева на первый план выходит квадратичное слагаемое.

Уравнение (1.73) может быть представлено в терминах физических параметров $\dot{L}$ и $\dot{Q}_S$:

$$\Theta_2 = \frac{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}\, \dot{L}^2}{(\gamma_1+\gamma_2) D_{12} n_{0*}} t + \frac{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}{2 n_{2*}^{(0)} c_{p,l2}} \frac{\dot{Q}_S - \dot{q}_S}{\dot{Q}_S} Z_2 + \frac{1}{2} \frac{n_{l2}^2\, n_{1*}^{(0)}}{(\gamma_1+\gamma_2)\, n_{0*}\, n_{2*}^{(0)}} \frac{\chi_2}{D_{12}} Z_2^2 , \tag{1.74}$$

где $c_{p,lj}$ — это удельная теплоемкость j-й жидкости при постоянном давлении в расчете на одну молекулу. В случае, когда жидкости обладают одинаковыми характеристиками, и нет разницы притока тепла с двух сторон $\dot{q}_S$, это уравнение принимает вид уравнения (1.29), полученного в разделе 1.2.2.

Аналогичное выражение для первой жидкости:

$$\Theta_1 = \frac{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}\, \dot{L}^2}{(\gamma_1+\gamma_2) D_{12} n_{0*}} t + \frac{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}{2 n_{1*}^{(0)} c_{p,l1}} \frac{\dot{Q}_S + \dot{q}_S}{\dot{Q}_S} Z_1 + \frac{1}{2} \frac{n_{l1}^2\, n_{2*}^{(0)}}{(\gamma_1+\gamma_2)\, n_{0*}\, n_{1*}^{(0)}} \frac{\chi_1}{D_{12}} Z_1^2 . \tag{1.75}$$

Значения параметров, используемых в уравнениях (1.69), (1.74) и (1.75), для воды и *н*-гептана приведены в таблице 1.1. В приложении С приведены вычисления температуры поверхностного кипения T_* и физические свойства паровой смеси при этой температуре.

1.3.3. Срыв парового слоя в хорошо перемешанной системе

В этом подразделе будет рассмотрен установившийся процесс кипения смеси в случае, когда описываемая система хорошо перемешана процессом кипения. Случай, когда система устойчиво стратифицирована, является более сложным и подробно рассмотрен в главе 2.

На рисунке 1.7 схематично показан процесс формирования пузырька, подробно рассмотренный в разделе 1.2.3.

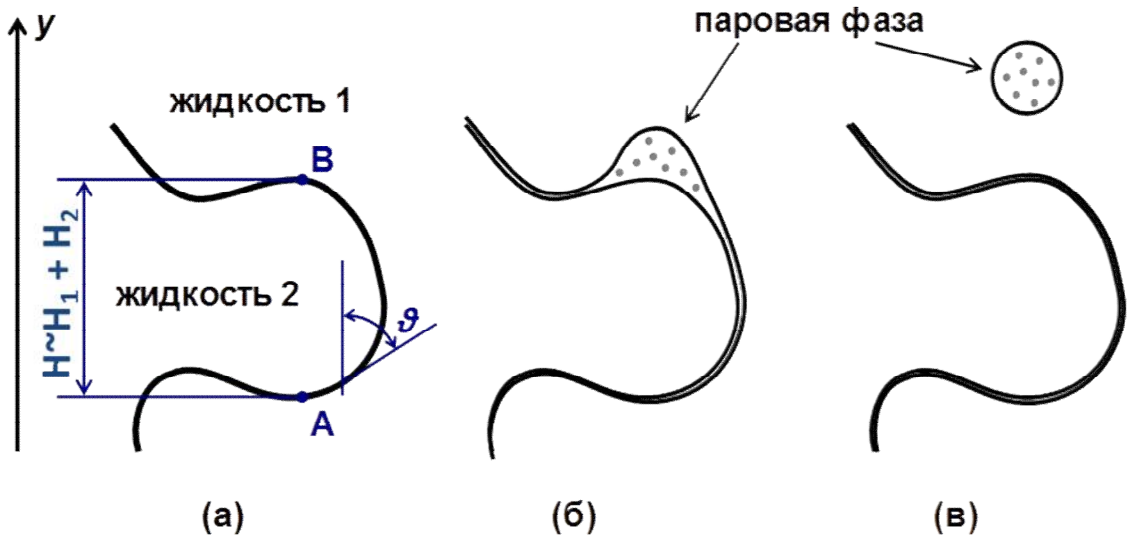


Рисунок 1.7. Формирования пузырька пара из слоя пара, образующегося на границе двух несмешивающихся жидкостей

Характерная толщина окрестности парового слоя, за пределом которой начинается окрестность другого парового слоя равна

$$H_1 + H_2 \sim \left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)^{-1}.$$

Отношение между характерными толщинами слоев жидкости H_1 и H_2 зависит от соотношения объемных долей ϕ_j этих жидкостей:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\phi_1}{1-\phi_1}.$$

С учетом предыдущего выражения,

$$H_j \sim \phi_j \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)^{-1}. \qquad (1.76)$$

Механизм пузыреобразования в процессе кипения смеси, находящейся ниже температуры объемного кипения компонент, подробно описан в разделе 1.2.3. Когда растущий паровой слой достигает достаточной толщины, пар, движущийся под силой градиента давления, начинает просачиваться вдоль слоя и формируется пузырек пара, который в какой-то момент отрывается, после чего процесс начинается сначала. Руководствуясь теми же соображениями, что и в разделе 1.2.3, можно найти вклад вязкого течения Пуазейля вдоль растущего парового слоя в скорость роста толщины этого слоя:

$$\dot{L}_P \approx -\frac{(\rho_{l1} + \rho_{l2}) g L^3}{96\,\eta_{12}} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right),$$

где η_{12} — динамическая вязкость газовой смеси, g — ускорение свободного падения, ρ_j — плотность j-й жидкости. $\dot{L}_P$ сильно зависит от толщины слоя, $\dot{L}_P \sim L^3$, в то время как составляющая скорости роста, обусловленная испарением жидкости, остается постоянной, в силу чего на ранних стадиях роста парового слоя вкладом течения Пуазейля можно пренебречь, и считать, что обнуление парового слоя происходит, когда вклады обоих процессов становятся равны. Таким образом, можно вычислить толщину парового слоя перед его отрывом

$$L_* \approx \left[\frac{96\,\eta_{12}}{(\rho_{l1} + \rho_{l2}) g} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)^{-1} \dot{L} \right]^{1/3}$$

в момент времени

$$t_* \approx \frac{L_*}{\dot{L}} \approx \left[\frac{96\,\eta_{12}}{(\rho_{l1}+\rho_{l2})g}\left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)^{-1}\right]^{1/3} \dot{L}^{-2/3}. \qquad (1.77)$$

Можно заметить, что при срыве пузырька пара в жидкости остается небольшой локальный перегрев, связанный с линейным по времени слагаемым в уравнении (1.74). В разделе 1.2.3 было показано, что для системы жидкостей с близкими характеристиками, этим перегревом можно пренебречь, и считать, что после срыва парового слоя система возвращается на одну из начальных стадий роста с $L \ll L_*$. Для случая произвольных жидкостей порядки величин остаются прежними, соответственно, пренебрежение этим перегревом по-прежнему справедливо.

Найдем характерный максимальный перегрев жидкости в момент t_* на максимальном расстоянии от границы раздела, $z_{j,\max} \sim H_j$. Из уравнения (1.74) имеем

$$\Theta_{2,\max} = \frac{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}\,\dot{L}^2}{(\gamma_1+\gamma_2)D_{12}n_{0*}} t_* + \frac{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}{2n_{2*}^{(0)} c_{p,l2}}\left[1-\frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] Z_{2,\max} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{n_{l2}^2\, n_{1*}^{(0)}}{(\gamma_1+\gamma_2)\, n_{0*}\, n_{2*}^{(0)}}\frac{\chi_2}{D_{12}} Z_{2,\max}^2 = \qquad (1.78)$$

$$= \Theta_{4/3} Z_{\max}^{4/3} + \left[1-\frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right]\Theta_{2,1} Z_{\max} + \Theta_{2,2} Z_{\max}^2,$$

где, в соответствии с (1.77), (1.71) и (1.76), введены следующие обозначения:

$$Z_{\max} = Z_{1,\max} + Z_{2,\max} = \left(\frac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}}\frac{\phi_1}{\chi_1} + \frac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}}\frac{\phi_2}{\chi_2}\right)\frac{\dot{L}}{(\delta S\,/\,\delta V)}, \qquad (1.79)$$

$$Z_{j,\max} = \psi_j Z_{\max}, \qquad \psi_j = \frac{\dfrac{n_{j*}^{(0)}}{n_{lj}}\dfrac{\phi_j}{\chi_j}}{\dfrac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}}\dfrac{\phi_1}{\chi_1} + \dfrac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}}\dfrac{\phi_2}{\chi_2}},$$

$$\Theta_{4/3} = \frac{\dfrac{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}}{(\gamma_1+\gamma_2) D_{12} n_{0*}} \left(\dfrac{96\,\eta_{12}}{(\rho_1+\rho_2) g}\right)^{1/3} \dfrac{\delta S}{\delta V}}{\left(\dfrac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}}\dfrac{\phi_1}{\chi_1} + \dfrac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}}\dfrac{\phi_2}{\chi_2}\right)^{4/3}}, \tag{1.80}$$

$$\Theta_{j,1} = \frac{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}{2 n_{j*}^{(0)} c_{p,lj}} \psi_j, \tag{1.81}$$

$$\Theta_{j,2} = \frac{1}{2} \frac{n_{lj}^2\, n_{2-j*}^{(0)}}{(\gamma_1+\gamma_2)\, n_{0*}\, n_{j*}^{(0)}} \frac{\chi_j}{D_{12}} \psi_j^2. \tag{1.82}$$

Аналогичным образом может быть написано уравнение для перегрева в жидкости 1:

$$\Theta_{1,\max} = \Theta_{4/3} Z_{\max}^{4/3} + \left[1 + \frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] \Theta_{1,1} Z_{\max} + \Theta_{1,2} Z_{\max}^2. \tag{1.83}$$

Как было сказано выше, после срыва парового слоя, можно считать, что система вернулась практически в исходное состояние. Усредненные по времени и пространству выражения (1.74) и (1.75) определяются средними $< t >= t_* \,/\, 2$ и $< z^n >= z_{\max}^n \,/\, (n+1)$:

$$<\Theta_1>=\frac{\Theta_{4/3}}{2}Z_{\max}^{4/3}+\left[1+\frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right]\frac{\Theta_{1,1}}{2}Z_{\max}+\frac{\Theta_{1,2}}{3}Z_{\max}^2, \tag{1.84}$$

$$<\Theta_2>=\frac{\Theta_{4/3}}{2}Z_{\max}^{4/3}+\left[1-\frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right]\frac{\Theta_{2,1}}{2}Z_{\max}+\frac{\Theta_{2,2}}{3}Z_{\max}^2. \tag{1.85}$$

Уравнения (1.78), (1.83), (1.84) показывают отношения между переменными состояния системы, которые могут быть измерены, и скоростью роста парового слоя $\dot{L}$ (или $Z_{\max}$, эти две переменные могут быть выражены друг через друга, см. (1.79)) и параметром, характеризующим асимметричность притока тепла с двух сторон $(\dot{q}_S / \dot{Q}_S)$. Считая $\Theta_{j,\max}$ постоянным, можно найти $(\dot{q}_S / \dot{Q}_S)$ и $Z_{\max}$ с помощью уравнений (1.78) и (1.83). Уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\Theta_{1,\max}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,\max}}{\Theta_{2,1}}=\\ =\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}}+\frac{1}{\Theta_{2,1}}\right)\Theta_{4/3}Z_{\max}^{4/3}+2Z_{\max}+\left(\frac{\Theta_{1,2}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,2}}{\Theta_{2,1}}\right)Z_{\max}^2\end{aligned} \tag{1.86}$$

определяет $Z_{\max}$. Тогда отношение $(\dot{q}_S / \dot{Q}_S)$ может быть найдено из уравнений (1.78) или (1.83). Аналогично, для заданного $<\Theta_j>$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{<\Theta_1>}{\Theta_{1,1}}+\frac{<\Theta_2>}{\Theta_{2,1}}=\\ =\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}}+\frac{1}{\Theta_{2,1}}\right)\frac{\Theta_{4/3}}{2}Z_{\max}^{4/3}+Z_{\max}+\frac{1}{3}\left(\frac{\Theta_{1,2}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,2}}{\Theta_{2,1}}\right)Z_{\max}^2.\end{aligned} \tag{1.87}$$

1.3.4. Срыв парового слоя в стратифицированной системе

В предыдущем подразделе был рассмотрен случай кипения смеси, хорошо перемешанной пузырьками пара. Однако в реальных системах возможны режимы, при которых кипение идет не слишком интенсивно и система продолжает находиться в стратифицированном состоянии, граница раздела остается практически горизонтальной (см. рисунки 1.1 и 1.2). Срыв парового слоя в этом случае связан с развитием гравитационной неустойчивости Релея–Тейлора на границе контакта легкой жидкости и пара [13,14]. Однако, в отличие от классической задачи о неустойчивости Релея–Тейлора на границе раздела двух жидкостей, в рассматриваемом случае между жидкостями образуется очень тонкая прослойка пара, в отсутствие которой система является устойчиво стратифицированной. Такая постановка задачи является достаточно специфической и представляет собой отдельный интерес, поэтому ее рассмотрение вынесено в отдельную главу 2.

В отсутствие парообразования, показатель экспоненциального роста наиболее опасной моды возмущения описывается (2.25)

$$\lambda_1 = \frac{L^3}{54\eta_{12}} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2} \frac{k_1^4(k_2^2+k_1^2/3)}{k_{12}^2+k_1^2/3}, \qquad (1.88)$$

где σ_j — коэффициент поверхностного натяжение на границе жидкость–пар, а k_1, k_2, и k_{12}могут быть получены из уравнения (2.21). Для того, чтобы придать последнему уравнению более понятный физический смысл, введем следующие обозначения: $\tilde{\sigma} = \sigma_1\sigma_2 / (\sigma_1+\sigma_2)$ и $\tilde{\rho}$, соответствующее

$$\left(\frac{\tilde{\rho}g}{\tilde{\sigma}}\right)^2 = k_1^4 \frac{k_2^2 + \frac{k_1^2}{3}}{k_{12}^2 + \frac{k_1^2}{3}}$$

(см. (2.21)). Тогда выражение (1.88) можно записать в виде

$$\lambda_1 = \frac{L^3(\tilde{\rho}g)^2}{54\eta_{12}\tilde{\sigma}}.$$

Соответствующее время развития гидродинамической неустойчивости $t_* \approx 1/\lambda_1 \sim L^{-3}$. Как и в предыдущем случае, видно, что скорость развития неустойчивости сильно зависит от ширины парового слоя, на начальных этапах при малых L неустойчивость развивается медленно, в то время как для больших L неустойчивость нарастает очень стремительно. Из тех же соображений, что и в предыдущем случае, будем считать, что на начальных стадиях роста парового слоя развивающуюся неустойчивость можно не принимать во внимание до тех пор, когда характерное время развития неустойчивости не сравняется со временем роста парового слоя $L/\dot{L}$. Когда это произойдет, паровой слой сорвется. Таким образом,

$$t_* = \frac{54\eta_{12}\tilde{\sigma}}{(\dot{L}t_*)^3(\tilde{\rho}g)^2},$$

или

$$t_* = \frac{(54\eta_{12}\tilde{\sigma})^{1/4}}{(\tilde{\rho}g)^{1/2}}\dot{L}^{-3/4}. \qquad (1.89)$$

Примечательно, что для стратифицированной системы показатель степени в зависимости $t_*(\dot{L})$ оказался отличным от показателя степени в случае хорошо перемешанной системы (см. (1.77)).

Зная время роста парового слоя до момента его срыва t_*, можно вычислить максимальный перегрев в компоненте, аналогично тому, как это было сделано для перемешанной системы. Выражения (1.74) и (1.75) в этом случае дают

$$\Theta_{1,\max} = \Theta_{5/4} Z_{\max}^{5/4} + \left[1 + \frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] \Theta_{1,1} Z_{\max} + \Theta_{1,2} Z_{\max}^2 , \tag{1.90}$$

$$\Theta_{2,\max} = \Theta_{5/4} Z_{\max}^{5/4} + \left[1 - \frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] \Theta_{2,1} Z_{\max} + \Theta_{2,2} Z_{\max}^2 , \tag{1.91}$$

где

$$\Theta_{5/4} = \frac{\dfrac{n_{1*}^{(0)} n_{2*}^{(0)}}{(\gamma_1 + \gamma_2) D_{12} n_{0*}} \dfrac{(54 \eta_{12} \tilde{\sigma})^{1/4}}{(\tilde{\rho} g)^{1/2}} \left(\dfrac{\delta S}{\delta V}\right)^{5/4}}{\left(\dfrac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}} \dfrac{\phi_1}{\chi_1} + \dfrac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}} \dfrac{\phi_2}{\chi_2}\right)^{5/4}} . \tag{1.92}$$

Средние перегревы жидких фаз:

$$< \Theta_1 > = \frac{\Theta_{5/4}}{2} Z_{\max}^{5/4} + \left[1 + \frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] \frac{\Theta_{1,1}}{2} Z_{\max} + \frac{\Theta_{1,2}}{3} Z_{\max}^2 , \tag{1.93}$$

$$< \Theta_2 > = \frac{\Theta_{5/4}}{2} Z_{\max}^{5/4} + \left[1 - \frac{\dot{q}_S}{\dot{Q}_S}\right] \frac{\Theta_{2,1}}{2} Z_{\max} + \frac{\Theta_{2,2}}{3} Z_{\max}^2 . \tag{1.94}$$

Для известных $\Theta_{j,\max}$ и $<\Theta_j>$, можно найти

$$\frac{\Theta_{1,\max}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,\max}}{\Theta_{2,1}}=\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}}+\frac{1}{\Theta_{2,1}}\right)\Theta_{5/4}Z_{\max}^{5/4}+ \\ +2Z_{\max}+\left(\frac{\Theta_{1,2}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,2}}{\Theta_{2,1}}\right)Z_{\max}^{2}, \tag{1.95}$$

$$\frac{<\Theta_1>}{\Theta_{1,1}}+\frac{<\Theta_2>}{\Theta_{2,1}}=\left(\frac{1}{\Theta_{1,1}}+\frac{1}{\Theta_{2,1}}\right)\frac{\Theta_{5/4}}{2}Z_{\max}^{5/4}+ \\ +Z_{\max}+\frac{1}{3}\left(\frac{\Theta_{1,2}}{\Theta_{1,1}}+\frac{\Theta_{2,2}}{\Theta_{2,1}}\right)Z_{\max}^{2}. \tag{1.96}$$

1.3.5. Парообразование при постоянном притоке тепла

Рассмотрим связь параметров состояния системы с объемным притоком тепла

$$\dot{Q}_V=\frac{\delta Q}{\delta V\delta t}.$$

Соответствующий приток тепла на единицу площади

$$\dot{Q}_S=\left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)^{-1}\dot{Q}_V.$$

При статистически стационарном процессе кипения средняя температура не увеличивается, и все приходящее в систему тепло расходуется на парообразование, поэтому уравнение (1.69), связывающее $\dot{Q}_S$ и $\dot{L}$, остается справедливо. Тогда уравнение (1.79) принимает вид

$$Z_{\max} = \left(\frac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}} \frac{\phi_1}{\chi_1} + \frac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}} \frac{\phi_2}{\chi_2} \right) \frac{\dot{L}}{(\delta S \,/\, \delta V)} = \\ = \frac{\left(\frac{n_{1*}^{(0)}}{n_{l1}} \frac{\phi_1}{\chi_1} + \frac{n_{2*}^{(0)}}{n_{l2}} \frac{\phi_2}{\chi_2} \right) \frac{\dot{Q}_V}{(\delta S \,/\, \delta V)^2}}{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}. \tag{1.97}$$

Используя это выражение для $Z_{\max}$, можно вычислить максимальный перегрев в системе в соответствии с (1.90) и (1.91) и средний перегрев в жидкостях в соответствии с (1.93) и (1.94).

1.4. Оценка параметров кипения на границе раздела реальных жидкостей на примере горящего *н*-гептана, налитого поверх воды

В случае горения легкой горючей жидкости, налитой поверх более тяжелой негорючей жидкости, можно вычислить приток тепла от горящей поверхности к границе раздела:

$$\dot{Q}_S \sim \kappa_1 (T_{1b} - T_*) \,/\, H_1,$$

где T_{1b} — температура объемного кипения горящей жидкости, а H_1 — толщина слоя этой жидкости. В этом разделе вычисления носят оценочный характер, поэтому потерями тепла внутри слоя жидкости можно пренебречь. Подставляя характеристики *н*-гептана (см. таблицу 1.1) в выражение (1.69), получаем

$$\dot{L} = \frac{\kappa_1}{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}} \frac{T_{1b} - T_*}{H_1} = \frac{c_{p,l1} n_{l1} \chi_1}{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}} \frac{T_{1b} - T_*}{H_1} \approx \frac{1.47 \cdot 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}}{H_1}.$$

Используя (1.89), можно найти время обновления парового слоя $t_* \approx 5.53 \cdot 10^{-4} \text{м}^{3/4}\text{с}^{1/4} \times \dot{L}^{-3/4}$ и соответствующую максимальную толщину слоя

$L_* = \dot{L} t_* \approx 5.53 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^{3/4}\text{с}^{1/4} \times \dot{L}^{1/4} \approx 1.93 \cdot 10^{-5}\,\text{м}^{5/4} \times H_1^{-1/4}$ в момент срыва. Длина волны наиболее опасной моды неустойчивости между слоями *н*-гептана и воды $l_{vl} = 2\pi \,/\, k_{\max}^{n\text{C}_7\text{H}_{16}-\text{H}_2\text{O}} \approx 1.46\,\text{см}$ (см. главу 2). Таким образом, пузырек пара, срывающийся с поверхности раздела, сформирован участком парового слоя площадью $S_{vl} \approx l_{vl}^2$, соответственно, его объем $V_b \approx S_{vl} L_*$ или $(\pi \,/\, 6) d_b^3$, где d_b — диаметр образовавшегося пузырька. Отсюда находим

$$d_b \approx [(6 \,/\, \pi) l_{vl}^2 L_*]^{1/3} \approx 2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^{13/12} \times H_1^{-1/12}.$$

Можно заметить, что зависимость диаметра пузырька d_b от толщины слоя жидкости H_1 носит степенной характер с очень маленьким показателем $(-1 \,/\, 12)$. Для толщины слоя порядка 1 см диаметр пузырька $d_b \approx 2.9\,\text{мм}$, что слегка превосходит размер пузырьков, наблюдаемых в эксперименте (см. рисунок 1.2). Это несоответствие вызвано тем, что при оценке мы пренебрегли потерями тепла с поверхности жидкости. Таким образом, полученное теоретическое описание удовлетворительно согласуется с экспериментальными наблюдениями.

1.5. Оценка допустимости используемых упрощений

В этом разделе обсуждается правомерность использования предположений, допущенных в ходе построения теории.

• В ходе решения предполагается плоская геометрия растущего парового слоя и его окрестностей, кривизна поверхностей не принимается во внимание. Поправки, связанные с искривлением поверхности, в интересующем нас случае действительно оказываются малы в силу того, что максимальная толщина

паровой слой $L_{\max} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ м мала по сравнению с характерными масштабами вдоль этого слоя, которые составляют $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ м.

• При описании процесса испарения мы пренебрегаем конечностью скорости перехода молекул из жидкости в газ, считая, что концентрация частиц сразу над поверхностью жидкости равна концентрации насыщенного пара. Анализ полученного результата показывает, что построенная теория согласуется с экспериментальными данными, в то время как для испарения с открытой поверхности, конечность скорости оттока частиц уменьшает скорость испарения в 10 раз (см, например, [91]).

• Характерное время срыва парового слоя получено для двух предельных случаев: случая хорошо перемешанной системы и случая стратифицированной системы. В приложении А показано, что режим кипения управляется скоростью притока тепла в систему, материальными параметрами веществ и объемом системы. В эксперименте с водой и *н*-гептаном, показанном на рисунке 1.2, система оставалась в состоянии, близком к стратифицированному. Во втором эксперименте, система вода–уайт-спирит (рисунок 1.1) прошла через все режимы от стратификации до перемешивания.

1.6. Выводы

В данной главе рассмотрено явление кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей при температуре ниже температуры объемного кипения каждой из компонент в отдельности. На первом этапе теория строилась для случая кипения жидкостей с близкими материальными параметрами, когда система может считаться зеркально симметричной. На втором этапе теория была обобщена на случай жидкостей с произвольными характеристиками. Из первых принципов построено описание процесса и выведены уравнения эволюции

парового слоя и полей температуры жидкости. Найдено решение этих уравнений, соответствующее растущему паровому слою.

Проведен анализ задачи о срыве пузырьков пара с растущего парового слоя. На основе результатов этого анализа установлено характерное время роста парового слоя до его «обнуления» за счет срыва пузырьков, оценены максимальный и средний перегрев системы. Рассмотрена задача об остывании системы в отсутствии внешнего притока тепла; выделены и описаны три характерные стадии процесса.

Примечательно, что в случае объемного кипения первоочередной задачей теоретического описания кинетики процесса является задача о скорости зародышеобразования. Эта задача требует привлечение аппарата статистической физически неравновесных термодинамических процессов [92] и теории гидродинамических флуктуаций [93]. Однако построенное описание процесса кипения прямого контакта двух несмешивающихся жидкостей описывается в рамках макроскопической гидродинамики многофазных систем и не требует рассмотрения зародышеобразования на уровне построения статфизической теории.

ГЛАВА 2. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО СЛОЯ ГАЗА МЕЖДУ ДВУХ ТОЛСТЫХ СЛОЕВ ЖИДКОСТЕЙ

В связи с рассмотрением процесса поверхностного кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент, становится актуальной задача о гравитационной неустойчивости системы, в которой между двумя устойчиво стратифицированными слоями жидкостей заключен тонкий слой пара (см. рисунок 2.1). В этом случае срыв парового слоя происходит именно в связи с развитием неустойчивостью Релея–Тейлора на верхней границе раздела жидкость–пар.

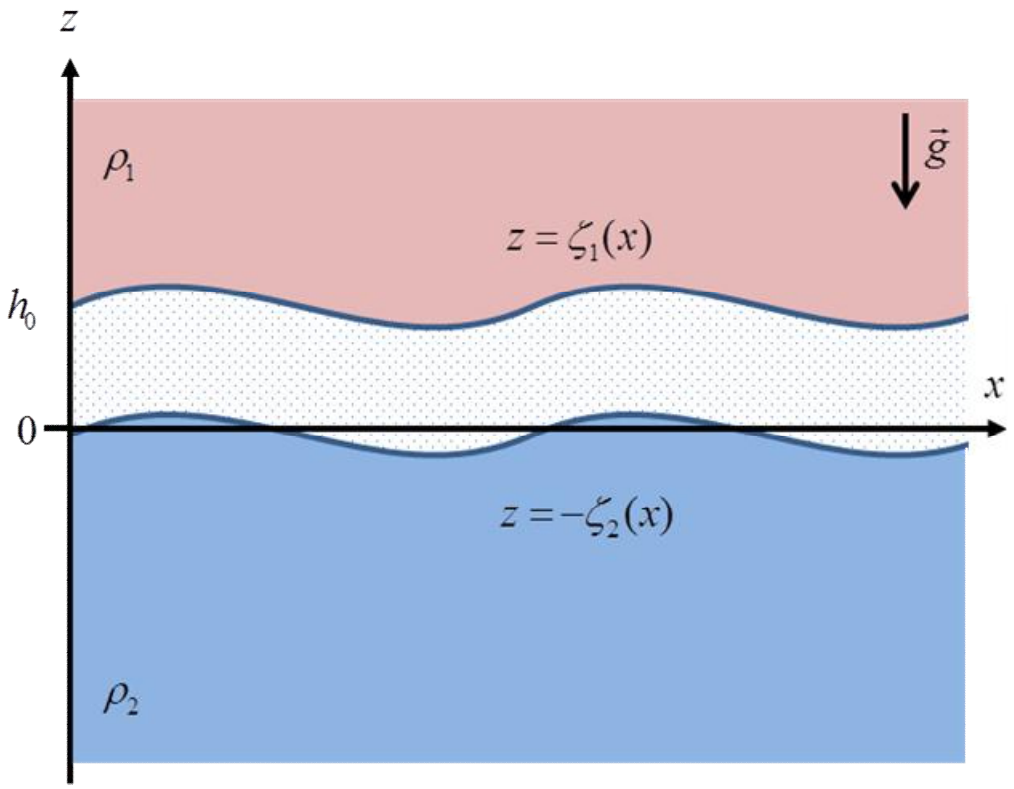


Рисунок 2.1. Система двух жидкостей с плотностями ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$, разделенных слоем пара

Подробно процесс кипение системы двух несмешивающихся жидкостей обсуждался в главе 1. На рисунке 1.2 приведены фотографии процесса горения

слоя *н*-гептана, налитого поверх слоя воды. В ходе эксперимента был оценен характерный средний диаметр пузырька пара, срывающегося с границы раздела, $d_b \sim 1$ мм, цепочки пузырьков находятся друг от друга на характерном расстоянии примерно 1 см, т.е. каждый пузырек сформирован из пара, сорвавшегося с участка площадью $S_{vl} \sim 1$ см^2. Объем пузырька $V_b = (\pi / 6) d_b^3$ равен объему соответствующего участка парового слоя $h_{vl} S_{vl}$; таким образом, характерная толщина срывающегося парового слоя $h_{vl} = V_b / S_{vl} \sim 10^{-5}$м.

2.1. Динамика тонкого парового слоя, заключенного между двумя полупространствами жидкостей

В этом разделе будут рассмотрены гравитационно-капиллярные волны и неустойчивость системы, в результате которой эти волны могут нарастать. Для линейного анализа неустойчивости системы достаточно рассмотреть редуцированную двумерную задачу в (x, z)-геометрии, где z — это вертикальная координата, а x — координата, сонаправленная волновому вектору возмущений (см. рисунок 2.1). Слои жидкостей полагаются достаточно толстыми по сравнению с характерной длиной волны на границе раздела жидкость–пар; в этом случае можно считать, что жидкости, находясь в невозмущенном состоянии, занимают полпространства $z > h_0$ и $z < 0$. Плотности верхней и нижней жидкостей равны соответственно ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$, пар считается практически невесомым. Границами раздела являются поверхности $z = \zeta_1(x, t)$ и $z = \zeta_2(x, t)$ (см. рисунок 2.1); для невозмущенного состояния $\zeta_1 = h_0$ и $\zeta_2 = 0$, где h_0 — толщина невозмущенного слоя пара.

При решении классической задачи о неустойчивости Релея–Тейлора для двух жидкостей в отсутствие парового слоя между ними, жидкости считаются

невязкими. Такое приближение оказывается физически обоснованным в связи с очень малой характерной толщиной вязких пограничных слоев для обсуждаемых процессов в случае таких жидкостей, как вода. Толщина вязкого пограничного слоя при заданной скорости набегающего на поверхность жидкости потока может быть достоверно оценена на основе более поздней, чем труды лорда Релея, работы [94]. В рассматриваемой в этой главе проблеме вязкие пограничные слои в жидкостях так же останутся тонкими, поэтому задачу тоже можно решать в невязком приближении.

Плотность пара пренебрежимо мала по сравнению с плотностями жидкостей, вследствие чего течение можно рассматривать как безынерционное. С другой стороны, разница скоростей на границах контакта $\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2 = \dot{h}$ вызывает перераспределение пара, тем самым создавая поток в тонкой паровой прослойке, который, в отсутствии инерции, может сдерживаться только за счет вязкости, поэтому пренебрегать вязкостью пара неправомерно.

Так как характерные неоднородности давления, связанные с гидростатическим и гидродинамическим градиентами давления в системе, малы по сравнению с атмосферным давлением, пар можно считать несжимаемым.

Таким образом, в рассматриваемой системе течение жидкости считается невязким, тогда как течение пара является вязким и несжимаемым, при этом скорость течения внутри паровой прослойки значительно выше, чем скорость внутри жидкостей.

Рассмотрим течение внутри слоя пара. Толщина слоя $h = \zeta_1 - \zeta_2$ мала по сравнению с характерным горизонтальным масштабом профиля волны на границах раздела, поэтому течение пара можно считать практически параллельным срединной поверхности слоя, а давление — постоянным, $p_g(x,z) = p_g(x)$. Так как течение пара значительно быстрее течения жидкостей,

можно положить, что скорость на границе раздела жидкость–газ равна нулю. Таким образом, течение пара представляет собой вязкое течение Пуазейля вдоль тонкого зазора между двумя плоскостями:

$$v(x,z) = v_m(x)\left(1 - \frac{4(z-\zeta_m)^2}{h^2}\right), \tag{2.1}$$

где v — это скорость пара, направленная по касательной к серединной поверхности слоя, $\zeta_m = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$ — z-координата срединной поверхности слоя, v_m — скорость пара на поверхности ζ_m.

Течение внутри паровой области описывается уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_g(x,t) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{8\eta}{h^2} v_m(x,t), \tag{2.2}$$

где p_g — это давление внутри слоя пара, η — динамическая вязкость пара. Скорость изменения толщины слоя $\dot{h}$ зависит от потока пара через поперечное сечение слоя:

$$Q = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} v \,\mathrm{d}z = \frac{2}{3} v_m h\,; \qquad \dot{h} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Используя соотношение между v_m и градиентом давления (2.2), получаем

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p_g}{\partial x}\right).$$

При рассмотрении бесконечно малых возмущений можно ограничиться учетом только линейных по малым параметрам вкладов $(p_g - p_{g0})$ и $(h - h_0)$;

$$\dot{h} = \frac{h_0^3}{12\eta}\frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2}. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим теперь движение жидкостей. Так как в используемом приближении жидкости считаются невязкими, можно ввести скалярные потенциалы течения Φ_j. Скорость j-й жидкости при этом является градиентом потенциала:

$$\vec{v}_j = \nabla\Phi_j.$$

Условие несжимаемости $\nabla\cdot\vec{v}_j = 0$ накладывает ограничение на Φ_j:

$$\Delta\Phi_j(x,z,t) = 0\,, \qquad (2.4)$$

т.е. для потенциалов Φ_j справедливо уравнение Лапласса, а значит Φ_j являются гармоническими функциями пространственных координат. Уравнение Эйлера в терминах потенциалов имеет вид

$$\rho_j\nabla\left(\dot{\Phi}_j + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_j)^2\right) = -\nabla(p_j + \rho_j gz),$$

где p_j — это давление в j-й жидкости, g — ускорение свободного падения. Таким образом, можно вычислить поле давления для данного течения:

$$p_j = p_{j,0} - \rho_j\dot{\Phi}_j - \rho_j gz\,. \qquad (2.5)$$

Так как возмущения, рассматриваемые в задаче, бесконечно малы, в полученном уравнении оставлены только линейные слагаемые.

Условие баланса напряжений на поверхностях жидкостей связывает скачок давления на границах раздела с капиллярным давлением:

$$(p_1 - p_g)\,|_{z=\zeta_1} = \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}, \tag{2.6}$$

$$(p_2 - p_g)\,|_{z=\zeta_2} = -\sigma_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2}, \tag{2.7}$$

где σ_j — коэффициент поверхностного натяжения j-й жидкости.

Так как система близка к тому, чтобы считаться горизонтально стратифицированной, удобно искать решения в областях $z < 0$ и $z > h_0$, а не в областях $z < \zeta_2$ и $z > \zeta_1$. Следовательно, граничные условия необходимо перенести с $z = \zeta_2$ и $z = \zeta_1$ на, соответственно, $z = 0$ и $z = h_0$. При подстановке в граничные условия (2.6) и (2.7) выражения (2.5) получаем новые граничные условия

$$-\rho_1 \dot{\Phi}_1\,|_{z=h_0} - p_g - \rho_1 g(\zeta_1 - h_0) = \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}, \tag{2.8}$$

$$-\rho_2 \dot{\Phi}_2\,|_{z=0} - p_g - \rho_2 g \zeta_2 = -\sigma_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2}. \tag{2.9}$$

Дополнительно к полученным условиям, нужно учитывать кинематические граничные условия. Течение жидкости смещает границу раздела, $\dot{\zeta}_j$ определяется z-компонентой скорости j-й жидкости на ее границе. То же самое в терминах потенциалов имеет вид

$$\dot{\zeta}_1 = \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right|_{z=h_0}, \tag{2.10}$$

$$\dot{\zeta}_2 = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{2.11}$$

С учетом того, что $\dot{h} = \dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2$, из уравнения (2.3) следует

$$\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_2 = \frac{h_0^3}{12\eta}\frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2}. \tag{2.12}$$

2.2. Линейная неустойчивость состояния со строго горизонтальными границами раздела

Уравнение (2.4) с граничными условиями (2.8)–(2.12), образуют полную систему дифференциальных уравнений для полей $\Phi_j(x,z,t)$, $\zeta_j(x,t)$ и $p_g(x,t)$. Так как уравнения для возмущений однородны по x-координате и времени, решение можно искать экспоненциальной форме. Для полей потенциалов имеем

$$\Phi_1 \sim e^{-kz+ikx} \quad \text{и} \quad \Phi_2 \sim e^{kz+ikx}$$

с граничными условиями

$$\Phi_1 \,|_{z=h_0} = -k^{-1}\dot{\zeta}_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 \,|_{z=0} = k^{-1}\dot{\zeta}_2.$$

Остальные поля представимы в виде

$$\{\zeta_1, \zeta_2 - h_0, p_g\} = \{\xi_1, \xi_2, P\}e^{\lambda t+ikx}.$$

Тогда уравнения (2.8), (2.9) и (2.12) в терминах амплитуд ξ_1, ξ_2 и P образуют следующую систему:

$$\left(\rho_1 \frac{\lambda^2}{k} - \rho_1 g + \sigma_1 k^2\right)\xi_1 - P = 0, \tag{2.13}$$

$$\left(-\rho_2 \frac{\lambda^2}{k} - \rho_2 g - \sigma_2 k^2\right)\xi_2 - P = 0, \tag{2.14}$$

$$\lambda\xi_1 - \lambda\xi_2 + \frac{h_0^3}{12\eta} k^2 P = 0. \tag{2.15}$$

Соответствующее характеристическое уравнение для инкремента возмущений λ имеет вид

$$\begin{aligned} &\lambda\left(\lambda^2 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k^3\right) + \\ &\quad + Ak\left(\lambda^2 - gk + \frac{\sigma_1}{\rho_1} k^3\right)\left(\lambda^2 + gk + \frac{\sigma_2}{\rho_2} k^3\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $A = \dfrac{h_0^3}{12\eta} \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ — это параметр, связанный с толщиной парового слоя.

2.2.1. Предельные случаи бесконечно тонкого и бесконечно толстого слоя

В данном подразделе будут рассмотрены два предельных случая: случай бесконечно тонкого слоя ($h_0 \to 0$) и случай слоя, толщина которого стремится к бесконечности ($h_0 \to \infty$).

Рассмотрим сначала случай, когда толщина слоя исчезающе мала. При $h_0 \to 0$ второе слагаемое в уравнении (2.16) тоже стремится к нулю, и уравнение имеет две ветви решений:

$$\lambda = 0, \tag{2.17}$$

$$\lambda^2 = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k^3. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) соответствует уравнению для гравитационно-капиллярных волн в системе двух жидкостей в отсутствие паровой прослойки между ними (с поверхностным натяжением, равным сумме поверхностных натяжений обеих жидкостей $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$). Этот случай хорошо изучен и широко освещен в литературе (см, например, [90]). Так как правая часть уравнения никогда не принимает положительных значений, все λ являются мнимыми, т.е. неустойчивости нет. Уравнение (2.17) показывает, что для $h_0 \to 0$ неоднородности давления сглаживаются бесконечно медленно вследствие уменьшения вязкого течения внутри слоя. Такие возмущения p_g формируют нейтральную моду с $\lambda \to 0$ при $h_0 \to 0$.

Во втором предельном случае, когда толщина слоя h_0 и, соответственно, параметр A являются достаточно большими, второе слагаемое в уравнении (2.16) значительно превышает первое, и характеристическое уравнение имеет две независимые пары решений:

$$\lambda_{1,2}^2 = kg - \frac{\sigma_1}{\rho_1} k^3, \tag{2.19}$$

$$\lambda_{3,4}^2 = -kg - \frac{\sigma_2}{\rho_2} k^3. \qquad (2.20)$$

Эти решения соответствуют случаю обычных гравитационно-капиллярных волн на поверхности раздела жидкость–газ (см. уравнение (2.18)) для неустойчивого состояния, когда более тяжелая жидкость находится поверх легкого газа (уравнение (2.19)), и для устойчивого состояния, когда легкий газ находится поверх более тяжелой жидкости (уравнение (2.20)). Таким образом, при достаточно толстом слое пара, границы раздела жидкость–газ оказываются нечувствительны к движению друг друга. Уравнение (2.20) имеет только мнимые решения, тогда как уравнение (2.19) имеет пару вещественных корней при $k < k_1$, где $k_1 = \sqrt{\rho_1 g / \sigma_1}$. Наличие положительных λ означает наличие режима, в котором система неустойчива.

Для удобства дальнейших вычислений введем следующие обозначения:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 g}{\sigma_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho_2 g}{\sigma_2}}, \quad k_{12} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\sigma_1 + \sigma_2}}. \qquad (2.21)$$

2.2.2. Случай тонкого ненулевого парового слоя

Решение $\lambda = 0$ при $h_0 = 0$ уравнения (2.16) требует более тщательного анализа, так как оно может отклоняться от нуля и менять знак даже при сравнительно малых изменениях h_0.

Найдем характерные значения λ, A и k: λ_*, A_* и k_*. При подстановке $\lambda = 0$, уравнение (2.16) разрешимо при $k = k_1$ для любых значений A, при этом это единственное ненулевое значение k, которое удовлетворяет уравнению при

$\lambda = 0$. Таким образом, $\lambda(k)$ пересекает ноль только при $k = k_1$. Исходя из этого, естественно выбрать

$$k_* = k_1.$$

При $k = k_*$ значение слагаемых при λ^2, стоящих в скобках в уравнении (2.16), имеют порядок gk_*, поэтому естественно выбрать

$$\lambda_* = \sqrt{gk_1}.$$

Первое и второе слагаемые в уравнении (2.16) при $k = k_*$ и $\lambda = \lambda_*$ становятся соизмеримы при следующем характерном значении A:

$$A_* = \frac{1}{k_*\lambda_*} = g^{-1/2}k_1^{-3/2} = \left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}\right)^{3/4} g^{-5/4}.$$

Соответствующее значение h_0

$$h_{0*} = \left(\frac{12\eta}{g^{5/4}}\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}\right)^{1/3}\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}\right)^{1/4}. \qquad (2.22)$$

Для системы вода–*н*-гептан (см. таблицу 1.1) получаем

$$k_1 = 659 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{k_1} = 2\pi / k_1 = 1.0 \text{ см},$$

$$A_* = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{м} \cdot \text{с},$$

$$h_{0*} = 0.15 \text{ мм};$$

$$k_2 = 389 \text{ м}^{-1} \quad \text{и} \quad k_{12} = 206 \text{ м}^{-1}.$$

Приведенная ранее в разделе 2.1 оценка толщины слоя в момент перед срывом, наблюдаемой в эксперименте, $h_{vl} \sim 0.01$ мм в 15 раз меньше, чем найденное h_{0*}. Это означает, что решение можно считать применимым ($h_0 \ll h_{0*}$).

Обозначим ветвь решения, в которую превращается ветвь $\lambda = 0$ при отклонении A от нуля ($A \ll A_*$), как $\lambda_1(k)$. Для нее по непрерывности справедливо $|\lambda_1| \ll \lambda_*$. Таким образом, уравнение (2.16) принимает вид

$$\lambda_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\rho_2 + \rho_1} k(k^2 + k_{12}^2) + Ak^3 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\rho_1 \rho_2}(k^2 - k_1^2)(k^2 + k_2^2) = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{h_0^3}{12\eta} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{k^2(k_1^2 - k^2)(k_2^2 + k^2)}{k^2 + k_{12}^2}. \qquad (2.23)$$

На рисунке 2.2 видно, что это решение хорошо ложится на точное решение даже при достаточно большом отношении A / A_*. Несмотря на то, что функция $\lambda_1(k)$ имеет только один максимум, являющийся единственным положительным решением уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}(k^2)} = 0 = 2k^6 + (3k_{12}^2 - k_1^2 + k_2^2)k^4 - 2(k_1^2 - k_2^2)k_{12}^2 k^2 - k_1^2 k_2^2 k_{12}^2,$$

точное аналитическое вычисление точки этого максимума является достаточно громоздким, но в то же время может быть получено тривиальным способом.

Подставив значение $k_{\max}$, характерное для системы вода–*н*-гептан $k_{\max}^{n\mathrm{C_7H_{16}-H_2O}} = 429$ м$^{-1}$, получаем

$$\lambda_{\max}^{n\mathrm{C_7H_{16}-H_2O}} = 1.07 \cdot 10^{13} \text{м}^{-3}\text{с}^{-1} \times h_0^3. \qquad (2.24)$$

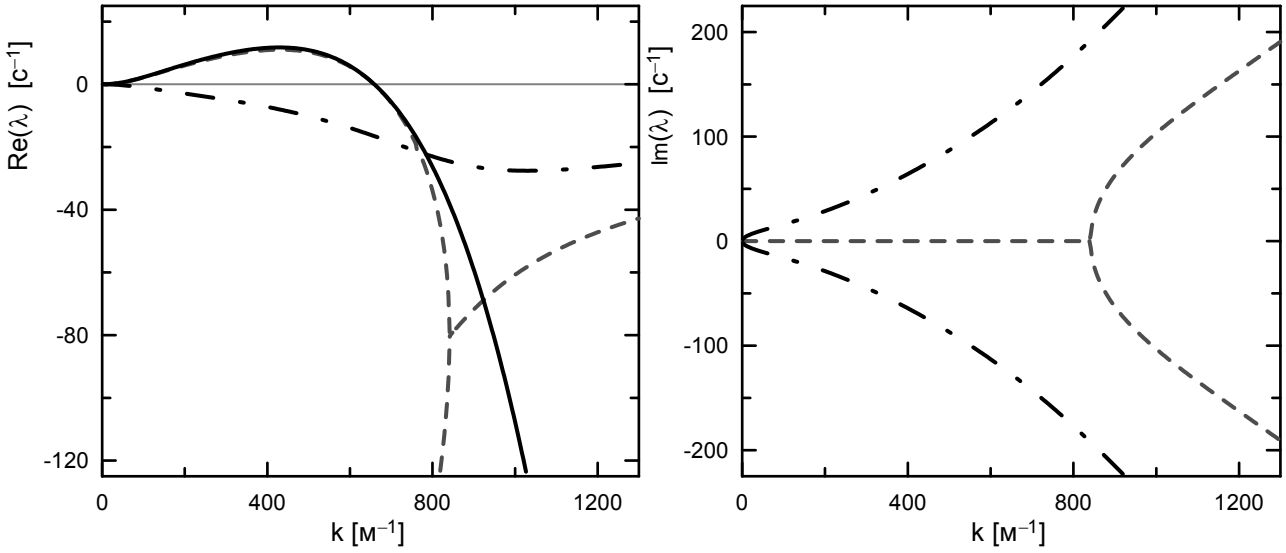


Рисунок 2.2. Спектр показателя инкремента возмущений $\lambda(k)$ (представлены вещественная и мнимая часть) для системы вода–*н*-гептан при $A = 0.3A_*$ имеет 4 ветви, полученные из уравнения (2.16). Пара ветвей, построенная штрихпунктирными линиями, отвечает паре комплексно сопряженных решений характеристического уравнения; их вещественная часть $\mathrm{Re}(\lambda)$ совпадает при любом k и всегда отрицательна. Вторая пара ветвей, представленная штриховыми линиями, отвечает паре комплексно сопряженных значений λ в области, где их мнимая часть $\mathrm{Im}(\lambda)$ не равна нулю; в остальной области она отвечает паре вещественных решений, одно из которых может принимать положительные значения, всегда пересекая ось абсцисс в точке $k = k_1$. Сплошной линией представлена аппроксимация (2.23) для единственной ветви λ, имеющей неотрицательную действительную часть.

Для оценочных вычислений можно решать полученное уравнение не для $k_{\max}$, а для близкого к нему $k_{1\max} = k_1 / \sqrt{3}$, которое соответствует точке максимума выражения (2.19). Тогда приближенное значение показателя экспоненциального роста возмущений имеет вид

$$\lambda_1(k_{1\max}) = \frac{h_0^3}{54\eta} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{k_1^4(k_2^2 + k_1^2 / 3)}{k_{12}^2 + k_1^2 / 3}. \qquad (2.25)$$

Для системы вода–*н*-гептан последнее выражение дает $1.10 \cdot 10^{13}\text{м}^{-3} \times h_0^3$, что всего на 3% больше, чем (2.24), и поэтому может считаться в достаточной степени достоверным.

2.3. Выводы

В данной главе рассмотрена задача о гравитационной неустойчивости тонкого слоя пара, заключенного между двумя устойчиво стратифицированными слоями жидкостей. Показано, что в случае системы, бесконечно протяженной в горизонтальном направлении (что на практике соответствует системам с размерами в горизонтальном направлении больше нескольких сантиметров), волновое число возмущений не ограничено снизу, и система всегда находится в неустойчивом состоянии. Вычислена длина волны наиболее опасной неустойчивости.

ГЛАВА 3. ВОЛНЫ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ

В данной главе исследуются волны на поверхности раздела двух горизонтальных тонких слоев несмешивающихся жидкостей при наличии высокочастотных горизонтальных вибраций. Конкретно, выводятся уравнения динамики волн на поверхности контакта двух несмешивающихся жидкостей, помещенных в поле горизонтальных высокочастотных вибраций. В экспериментальных работах Вольфа [34,35] было показано, что вязкие пограничные слои на 1–2 порядка тоньше, чем слои жидкостей, поэтому задачу можно рассматривать в приближении невязких жидкостей. Слои предполагаются достаточно тонкими для того, чтобы возникающие структуры можно было считать длинноволновыми [37].

3.1. Постановка задачи и вывод уравнений

Рассматривается система, состоящая из двух горизонтальных слоев несмешивающихся между собой жидкостей, ограниченная сверху и снизу твердыми непроницаемыми горизонтальными поверхностями (см. рисунок 3.1). Система подвергается горизонтальным линейно-поляризованным вибрациям со скоростью вибрационного движения $(b/2)e^{i\omega t} + c.c.$ (здесь и далее «*c.c.*» означает «комплексно-сопряженное»).

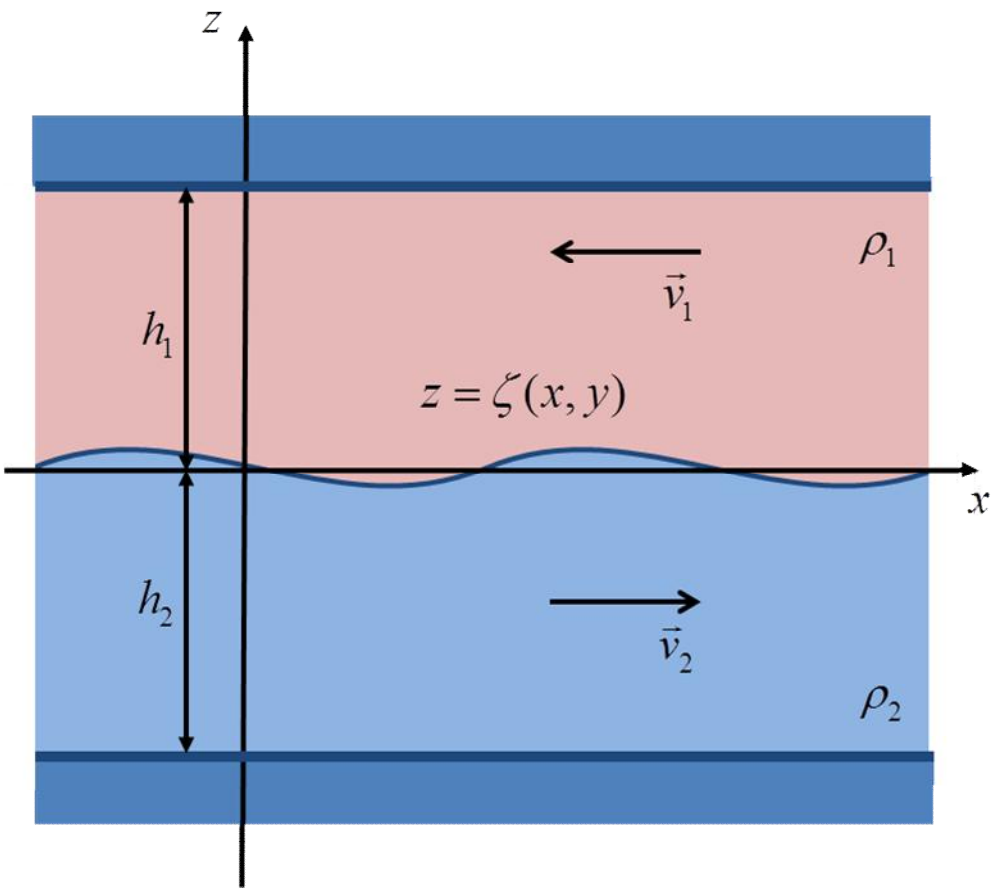


Рисунок 3.1. Двухслойная система несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций

Толщина верхнего слоя h_1, нижнего — h_2. Плотность верхней более легкой жидкости ρ_1, нижней — ρ_2. Система координат выбрана таким образом, чтобы вибрации были направлены вдоль оси x, ось z вертикальна.

В данной системе в пределе бесконечно протяженных слоев всегда возможно состояние с плоской границей раздела жидкостей $z = \zeta(x) = 0$. В реальных физических системах, в которых протяженность слоев конечна, колебания боковых границ приводят к искажению поверхности, однако на некотором расстоянии от границ поверхность по-прежнему будет оставаться плоской. Для невязких жидкостей это состояние (основное состояние для данной

системы) характеризуется пространственно однородным полем скорости пульсаций $\vec{v}_{j0}$:

$$\vec{v}_{j0} = a_j\left(t\right)\vec{e}_x, \quad a_j\left(t\right) = A_j e^{i\omega t} + c.c.,$$
$$A_1 = \frac{\rho_2 b(h_1+h_2)}{2(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}, \quad A_2 = \frac{\rho_1 b(h_1+h_2)}{2(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}, \tag{3.1}$$

где $j = 1,2$, $\vec{e}_x$ — единичный вектор оси x. Все уравнения и параметры в этом разделе безразмерны. Начало отсчета времени выбрано так, что b и A_j вещественны. Выражение (3.1) следует из того, что полный поток жидкости через вертикальное поперечное сечение должен быть равен

$$\int_{-h}^{+h} v^{(x)} dz = (h_1 + h_2)(be^{i\omega t} + c.c.)$$

(так как система движется со скоростью $(b\,/\,2)e^{i\omega t} + c.c.$).

Рассматривая невязкие движения жидкости, удобно ввести потенциал поля скорости:

$$\vec{v}_j = -\nabla\phi_j. \tag{3.2}$$

В системе должен выполняться закон сохранения массы невязкой жидкости,

$$\operatorname{div}\vec{v}_j = 0,$$

а это значит, что потенциал течения является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\phi_j = 0.$$

Кинематические условия на верхней и нижней границе:

$$\phi_{1z}\left(z=h_1\right)=\phi_{2z}\left(z=-h_2\right)=0; \tag{3.3}$$

и на поверхности $z=\zeta\left(x,y\right)$:

$$\dot{\zeta}=-\phi_{1z}+\nabla\phi_1\cdot\nabla\zeta, \tag{3.4}$$

$$\dot{\zeta}=-\phi_{2z}+\nabla\phi_2\cdot\nabla\zeta. \tag{3.5}$$

(Здесь и далее точка сверху означает производную по времени, а буква в нижнем индексе означает дифференцирование по соответствующей координате). Уравнения (3.4) и (3.5) следуют из условия того, что нулевое значение дистанционной функции $F=z-\zeta\left(x,y\right)$, отвечающее положению поверхности, перемещается вместе с жидкостью, т.е. ее лагранжева производная $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla F$ на поверхности должна обращаться в ноль: $-\dot{\zeta}+v^{(z)}-\vec{v}\cdot\nabla\zeta=0$, причем это условие должно выполняться для обеих жидкостей.

После подстановки потенциального течения уравнение Эйлера принимает вид:

$$\nabla\left(-\dot{\phi}_j+\frac{1}{2}\left(\nabla\phi_j\right)^2\right)=\nabla\left(-\frac{1}{\rho_j}p_j-gz\right),$$

где g — ускорение свободного падения. Последнее уравнение дает выражение для поля давления в пространстве при заданном поле течения:

$$p_j = p_{j0} + \rho_j \left(\dot{\phi}_j - \frac{1}{2} \left(\nabla \phi_j \right)^2 - gz \right). \qquad (3.6)$$

Для получения замкнутой системы уравнений следует добавить уравнение баланса напряжений на поверхности, которое может предоставить недостающие граничные условия для ϕ_j на границе двух жидкостей. Скачок давления при переходе через границу двух жидкостей обусловлен силами поверхностного натяжения:

$$z = \zeta\left(x, y\right): \quad p_1 - p_2 = -\alpha \operatorname{div} \vec{n} \quad \left(\vec{n} = \frac{\nabla F}{\left| \nabla F \right|} \right). \qquad (3.7)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к границе раздела жидкостей.

В данной системе в отсутствие вибраций нет никаких внутренних механизмов неустойчивости (в отличие от, например, [95, 96]). Наличие вибраций задает выделенное горизонтальное направление, и нет оснований ожидать, что вблизи порога неустойчивостей, связанных с вибрациями, формирующиеся структуры будут испытывать пространственную модуляцию вдоль второго горизонтального направления y, перпендикулярного направлению вибраций. Более того, анализ линейной устойчивости системы показал, что для тонкого слоя самыми опасными являются длинноволновые возмущения (см. [37,41]). Соответственно, далее задача будет рассматриваться (x, z)-геометрии в рамках длинноволнового (крупномасштабного) приближения: $\left| \partial_x \vec{v} \right| \ll \left| \partial_z \vec{v} \right|$.

3.2. Уравнение эволюции крупномасштабных возмущений

В этом разделе выводится уравнение динамики крупномасштабных возмущений с помощью стандартного метода многих масштабов с малыми

параметрами (T^{-1}/ω) и (h/l), где T — характерный временной масштаб эволюции волны на границе раздела, l — характерная длина волны, $\partial_x \sim l^{-1}$.

В рамках крупномасштабного приближения решения уравнений Лапласа для ϕ_j, согласованные с граничными условиями (3.3), можно выписать в виде

$$\phi_1 = -a_1(t)\,x + \Phi_1(x,t) - \frac{1}{2}(h_1 - z)^2\,\Phi_{1xx}(x,t) + \\ + \frac{1}{4!}(h_1 - z)^4\,\Phi_{1xxxx}(x,t) - \dots, \tag{3.8}$$

$$\phi_2 = -a_2(t)\,x + \Phi_2(x,t) - \frac{1}{2}(h_2 + z)^2\,\Phi_{2xx}(x,t) + \\ + \frac{1}{4!}(h_2 + z)^4\,\Phi_{2xxxx}(x,t) - \dots. \tag{3.9}$$

Здесь основное состояние явно выделено в первое слагаемое $-a_j(t)\,x$, Φ_j описывает возмущение течения. После подстановки p_j из выражения (3.6) и ϕ_j из выражений (3.8)–(3.9), условие баланса напряжений на границе раздела (3.7) примет вид

$$p_{1\infty} - p_{2\infty} + \rho_1 \left[-\dot{a}_1 x + \dot{\Phi}_1 - \frac{\left(h_1 - \zeta\right)^2}{2} \dot{\Phi}_{1xx} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(-a_1 + \Phi_{1x} - \frac{\left(h_1 - \zeta\right)^2}{2} \Phi_{1xxx} \right)^2 - \frac{\left(\left(h_1 - \zeta\right) \Phi_{1xx} \right)^2}{2} + \ldots \right] -$$

$$- \rho_2 \left[-\dot{a}_2 x + \dot{\Phi}_2 - \frac{\left(h_2 + \zeta\right)^2}{2} \dot{\Phi}_{2xx} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(-a_2 + \Phi_{2x} - \frac{\left(h_2 + \zeta\right)^2}{2} \Phi_{2xxx} \right)^2 - \frac{\left(\left(h_2 + \zeta\right) \Phi_{2xx} \right)^2}{2} + \ldots \right] +$$

$$+ \left(\rho_2 - \rho_1\right) g\zeta = \alpha \frac{\zeta_{xx}}{\left(1 + \zeta_x^2\right)^{3/2}}.$$

Здесь «…» используется для обозначения

$$O_1(\dot{\Phi}_j h_j^4 \,/\, l^4) + O_2(\Phi_j^2 h_j^4 \,/\, l^6) + O_3(a_j \Phi_j h_j^4 \,/\, l^5);$$

здесь и далее $O_k(Z)$ означает не учитываемый вклад того же порядка, что и аргумент Z, k используется для обозначения нескольких разных вкладов в одно и то же уравнение. Разность констант $p_{1\infty} - p_{2\infty}$ определяется из того условия, что в областях отсутствия возмущений пульсационного течения ($\Phi_j(x,t) = const$) граница раздела жидкостей остается плоской ($\zeta = 0$):

$$p_{1\infty} - p_{2\infty} - (\rho_1 a_1^2(t) - \rho_2 a_2^2(t))/2 = 0\,.$$

Выбирая в качестве единиц измерения длины, времени и плотности $\left[L\right] = \sqrt{\alpha / \left(\rho_2 - \rho_1\right) g}$, $\left[T\right] = \left[L\right] / b$ и ρ_*, соответственно, другими словами, используя переход

$$(x,z) \to (Lx, Lz),\ \ t \to Tt,\ \ \zeta \to L\zeta,\ \ \Phi_j \to (L^2/T)\Phi_j,\ \ \rho_i \to \rho_* \rho_i, \quad (3.10)$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$B\left[\rho_1\dot{\Phi}_1 - \rho_2\dot{\Phi}_2 + \frac{\rho_2(h_2+\zeta)^2}{2}\dot{\Phi}_{2xx} - \frac{\rho_1(h_1-\zeta)^2}{2}\dot{\Phi}_{1xx} + \right.$$

$$+\frac{\rho_2}{2}\left(a_2 - \Phi_{2x} + \frac{1}{2}\left(h_2+\zeta\right)^2\Phi_{2xxx}\right)^2 - \frac{\rho_1}{2}\left(a_1 - \Phi_{1x} + \frac{1}{2}\left(h_1-\zeta\right)^2\Phi_{1xxx}\right)^2 +$$

$$\left.+\frac{\rho_2}{2}\left(\left(h_2+\zeta\right)\Phi_{2xx}\right)^2 - \frac{\rho_1}{2}\left(\left(h_1-\zeta\right)\Phi_{1xx}\right)^2 - \frac{\rho_2 a_2^2 - \rho_1 a_1^2}{2} + \ldots\right] + \zeta = \frac{\zeta_{xx}}{\left(1+\zeta_x^2\right)^{3/2}}. \quad (3.11)$$

Здесь введен безразмерный вибрационный параметр

$$B \equiv \frac{\rho_* b^2}{\rho_2 - \rho_1}\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha g}} = B_0 + B_1, \quad (3.12)$$

в определении вибрационного параметра амплитуда скорости вибраций b и плотности ρ_j размерны (только для этой формулы — для прочих выкладок плотность обезразмерена на ρ_*), B_0 — критическое значение вибрационного параметра, выше которого состояние с плоской границей раздела становится

линейно неустойчивым, B_1 — малое отклонение вибрационного параметра от порогового значения.

В свою очередь, кинематические условия (3.4) и (3.5) принимают вид

$$\dot{\zeta} = \left(-(h_1 - \zeta)\Phi_{1x} + \frac{1}{3!} h^3 \Phi_{1xxx} - a_1 \zeta + \ldots \right)_x , \qquad (3.13)$$

$$\dot{\zeta} = \left((h_2 + \zeta)\Phi_{2x} - \frac{1}{3!} h^3 \Phi_{2xxx} - a_2 \zeta + \ldots \right)_x . \qquad (3.14)$$

Здесь «…» обозначает поправку $O_1(\Phi_j h_j^2 \zeta \,/\, l^3) + O_2(\Phi_j h_j^4 \,/\, l^5)$. Уравнения (3.11), (3.13) и (3.14) образуют замкнутую систему уравнений.

В деформации поверхности и скорости течения удобно выделить основные временные гармоники: осредненную по периоду вибраций и пульсационную,

$$\zeta = \eta\left(\tau, x\right) + \xi\left(\tau, x\right) e^{i\omega t} + c.c. + \ldots ,$$

$$\Phi_j = \varphi_j\left(\tau, x\right) + \psi_j\left(\tau, x\right) e^{i\omega t} + c.c. + \ldots ,$$

где τ — «медленное» время, связанное с осредненной эволюцией, «…» означает старшие гармоники по частоте вибраций.

Для построения разложения по малому параметру ω^{-1} следует определиться с иерархией малости параметров. Полагаем $B_1 \sim \omega^{-1}$, тогда $\eta \sim \omega^{-1}$ и $\partial_x \sim \omega^{-1/2}$ (см., например, [37,41]). Также ранее ([31,34]) было установлено, что для возмущений с конечной длиной волны (волновым числом $k \neq 0$) $B_0(k) = B_0(0) + Ck^2 + O(k^4)$. В общем случае, так как разложение

инкремента возмущений по B_1 около порога неустойчивости имеет ненулевое линейное слагаемое, а $B_0(k) - B_0(0) \sim k^2$, имеем $\partial_\tau \sim O_1(B_1) + O_2(k^2) \sim \omega^{-1}$. Порядки величин ξ, φ_j и ψ_j будут определены в процессе дальнейшего решения.

Группируя в уравнениях (3.13) и (3.14) слагаемые при $e^{i\omega t}$, находим

$$i\omega\xi + \xi_\tau = \left[-\left(h_1 - \eta\right)\psi_{1x} + \xi\varphi_{1x} - A_1\eta\right]_x + \ldots, \tag{3.15}$$

$$i\omega\xi + \xi_\tau = \left[\left(h_2 + \eta\right)\psi_{2x} + \xi\varphi_{2x} - A_2\eta\right]_x + \ldots, \tag{3.16}$$

где «…» обозначают поправки $O_1((\xi\varphi + \eta\psi)h^2 \,/\, l^4) + O_2(\psi h^4 \,/\, l^6)$. Осредненные по «быстрому» времени t слагаемые дают

$$\eta_\tau = \left[-\left(h_1 - \eta\right)\varphi_{1x} + \xi\psi_{1x}^* + c.c. - A_1\xi^* + c.c.\right]_x + \ldots, \tag{3.17}$$

$$\eta_\tau = \left[\left(h_2 + \eta\right)\varphi_{2x} + \xi\psi_{2x}^* + c.c. - A_2\xi^* + c.c.\right]_x + \ldots. \tag{3.18}$$

Здесь верхний индекс «*» обозначает комплексное сопряжение, а «…» обозначает малую поправку $O_1((\eta\varphi + \xi\psi)h_j^2 \,/\, l^4) + O_2(\varphi h_j^4 \,/\, l^6)$.

Из разности уравнений (3.15) и (3.16) следует, что $\psi_j \sim \omega^{-1/2}$, а из разности (3.17) и (3.18) — $\varphi_j \sim \omega^{-1}$. В дальнейшем для учета нелинейности оказывается удобным выделить первую поправку к ψ_j, т.е. представить ψ_j в виде $\psi_j = \psi_j^{(0)} + \psi_j^{(1)} + \ldots$, где $\psi_j^{(1)} \sim \omega^{-1}\psi_j^{(0)} \sim \omega^{-3/2}$. Из уравнения (3.15) (или(3.16)) в ведущем порядке ($\sim \omega^{-3/2}$) следует

$$\xi = \frac{i}{\omega}\left(h_1\psi_{1x} + A_1\eta\right)_x = -\frac{i}{\omega}\left(h_2\psi_{2x} + A_2\eta\right)_x \sim \omega^{-\frac{5}{2}}. \qquad (3.19)$$

Рассматривая разность (3.16) и (3.15), нужно иметь в виду, что мы интересуемся локализованными структурами, для которых $\Phi_{jx}\left(x=\infty\right)=0$, $\zeta\left(x=\infty\right)=0$. Тогда эта разность может быть проинтегрирована по x:

$$h_1\psi_{1x} + h_2\psi_{2x} - \eta(\psi_1 - \psi_2)_x - \frac{1}{6}(h_1^3\psi_1 + h_2^3\psi_2)_{xxx} - \xi(\varphi_1 - \varphi_2)_x +$$

$$+ (A_1 - A_2)\eta + \ldots = 0,$$

откуда, с учетом порядков малости величин, в двух ведущих порядках получаем

$$(h_1\psi_1^{(0)} + h_2\psi_2^{(0)})_x = -(A_1 - A_2)\eta = -\frac{(\rho_2 - \rho_1)(h_1 + h_2)}{2(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)}\eta, \qquad (3.20)$$

$$(h_1\psi_1^{(1)} + h_2\psi_2^{(1)})_x = (\psi_1^{(0)} - \psi_2^{(0)})_x\eta + \frac{1}{6}(h_1^3\psi_1^{(0)} + h_2^3\psi_2^{(0)})_{xxx}. \qquad (3.21)$$

Из разности и суммы уравнений (3.17) и (3.18) в главных порядках следует, соответственно,

$$h_1\varphi_1 = -h_2\varphi_2, \qquad (3.22)$$

$$\eta_\tau = -h_1\varphi_{1xx} = h_2\varphi_{2xx}. \qquad (3.23)$$

Теперь обратимся к уравнению (3.11). Будем по очереди собирать группы слагаемых при разных степенях $e^{i\omega t}$ в разных порядках разложения по ω^{-1}:

$\underline{\sim \omega^{+\frac{1}{2}} e^{i\omega t}}$:

$$i\omega B_0(\rho_1\psi_1^{(0)} - \rho_2\psi_2^{(0)}) = 0.$$

Введем

$$\psi^{(0)} \equiv \rho_j\psi_j^{(0)}. \tag{3.24}$$

Из последнего соотношения и уравнения (3.20) следует

$$\psi_x^{(0)} = -\frac{\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)(h_1 + h_2)}{2(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)^2}\eta. \tag{3.25}$$

$\underline{\sim \omega^0 e^{i\omega t}}$:

Слагаемых нет.

$\underline{\sim \omega^{-\frac{1}{2}} e^{i\omega t}}$:

$$i\omega B_1 \underbrace{(\rho_1\psi_1^{(0)} - \rho_2\psi_2^{(0)})}_{=0} + i\omega B_0(\rho_1\psi_1^{(1)} - \rho_2\psi_2^{(1)}) +$$

$$+B_0 \underbrace{(\rho_1\psi_1^{(0)} - \rho_2\psi_2^{(0)})_\tau}_{=0} + i\omega B_0 \frac{1}{2}(h_2^2\rho_2\psi_{2xx}^{(0)} - h_1^2\rho_1\psi_{1xx}^{(0)}) = 0.$$

(Подчеркнутые комбинации заведомо равны нулю). Откуда,

$$\rho_1\psi_1^{(1)} - \rho_2\psi_2^{(1)} = \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2)\,\psi_{xx}^{(0)}. \tag{3.26}$$

Из последнего соотношения и уравнения (3.21) следует

$$\psi_{1x}^{(1)} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)}\psi_x^{(0)}\eta + \frac{3h_2h_1^2\rho_1 - 2h_2^3\rho_1 + h_1^3\rho_2}{6\rho_1(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)}\psi_{xxx}^{(0)} =$$

$$= -\frac{\rho_2(3h_2h_1^2\rho_1 - 2h_2^3\rho_1 + h_1^3\rho_2)(\rho_2 - \rho_1)(h_1 + h_2)}{12(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)^3}\eta_{xx} - \tag{3.27}$$

$$- \frac{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)^2(h_1 + h_2)}{2(h_1\rho_2 + h_1\rho_1)^3}\eta^2,$$

$$\psi_{2x}^{(1)} = -\frac{\rho_2(3h_1h_2^2\rho_1 - 2h_1^3\rho_2 + h_2^3\rho_1)(\rho_2 - \rho_1)(h_1 + h_2)}{12(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)^3}\eta_{xx} -$$

$$- \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)^2(h_1 + h_2)}{2(h_1\rho_2 + h_1\rho_1)^3}\eta^2. \tag{3.28}$$

$\underline{\sim \omega^{-1}(e^{i\omega t})^0}$:

$$B_0[-\rho_2(A_2\psi_{2x}^{(0)*} + c.c.) + \rho_1(A_1\psi_{1x}^{(0)*} + c.c.)] + \eta = 0.$$

Подстановка выражений (3.24) и (3.25) в последнее уравнение дает

$$\left[-\frac{2B_0\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)^2(h_1 + h_2)^2}{h(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)^3} + 1\right]\eta = 0.$$

Таким образом, мы получаем условие разрешимости, определяющее B_0, которое задает границу линейной устойчивости системы:

$$B_0 = \frac{2(h_1\rho_2 + h_2\rho_1)^3}{2\rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1)^2(h_1 + h_2)}. \tag{3.29}$$

$\underline{\sim \omega^{-2}\left(e^{i\omega t}\right)^0}$: (с учетом(3.22))

$$B_1 \underbrace{\left[-\rho_2(A_2\psi_{2x}^{(0)*}+c.c.)+\rho_1(A_1\psi_{1x}^{(0)*}+c.c.)\right]}_{=-\eta/B_0}+$$

$$+B_0\Big[(\rho_2+\rho_1)\varphi_\tau+\rho_2\,|\psi_{2x}^{(0)}|^2-\rho_2(A_2\psi_{2x}^{(1)*}+c.c.-A_2\frac{h_2^2}{2}\psi_{2xxx}^{(0)*}+c.c.)-$$

$$-\rho_1\,|\psi_{1x}^{(0)}|^2+\rho_1(A_1\psi_{1x}^{(1)*}+c.c.-A_1\frac{h_1^2}{2}\psi_{1xxx}^{(0)*}+c.c.)\Big]=\eta_{xx}.$$

Избавляясь от $\psi_j^{(n)}$ с помощью (3.24)–(3.27), последнее уравнение можно переписать в виде

$$-\frac{B_1}{B_0}\eta+B_0\left[\frac{h_1\rho_2+h_2\rho_1}{h_2}\varphi_{1\tau}-\frac{3\rho_1\rho_2(\rho_2-\rho_1)^3(h_1+h_2)^2}{4(h_1\rho_2+h_2\rho_1)^4}\eta^2\right]+$$

$$+B_0\left[\frac{\rho_1\rho_2(\rho_{\ 2}-\rho_1)^2(h_1+h_2)^2(h_1^3\rho_2+h_2^3\rho_1)}{6(h_1\rho_2+h_2\rho_1)^4}\eta_{xx}\right]=\eta_{xx}.$$

Вместе с уравнением (3.23) это дает окончательную систему нелинейных уравнений динамики крупномасштабных возмущений основного состояния6:

$$\begin{cases} B_0\,\dfrac{h_1\rho_2+h_2\rho_1}{h_1h_2}(h_1\varphi_1)_\tau=\left[1-\dfrac{1}{3}\dfrac{h_1^3\rho_2+h_2^3\rho_1}{h_1\rho_2+h_2\rho_1}\right]\eta_{xx}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\rho_2-\rho_1}{h_1\rho_2+h_2\rho_1}\eta^2+\dfrac{B_1}{B_0}\eta, \\ \eta_\tau=-h_1\varphi_{1xx}. \end{cases}$$

(3.30)

Заметим, что система уравнений (3.30) правомерна для B_1, малых по сравнению с B_0, в противном случае нельзя говорить о крупномасштабном приближении. Однако в отдельных случаях такое приближение можно использовать для конечных отклонений от порога линейной неустойчивости и получить точную информацию о динамике системы (см., например, [97,98]).

3.3. Крупномасштабный характер линейной неустойчивости

В предыдущем разделе мы исходили из того, что для достаточно тонкого слоя неустойчивость носит крупномасштабный характер. В этом разделе будет приведена численная оценка, в каком случае слой можно считать достаточно тонким и использование такого приближения правомерно.

В соответствии с [37], необходимо, чтобы $\dfrac{h_1^3\rho_2 + h_2^3\rho_1}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1} < 3$. Для качественного обсуждения результата ограничимся случаем близкой толщины слоев $h_1 \approx h_2 \equiv h$. Тогда условие длинноволновости приобретает вид $h < \sqrt{3}$. Заметим при этом, что в полученной системе уравнений (3.30) перед η_{xx} стоит множитель $[1 - h^2 / 3]$. Более того, показатель экспоненциального роста λ линейных возмущений $(\eta, \varphi) \sim \exp(\lambda t + ikx)$ подчиняется уравнению

$$\lambda^2 = \frac{hk^2}{B_0(\rho_2 + \rho_1)}\left(-\left[1 - \frac{h^2}{3}\right]k^2 + \frac{B_1}{B_0}\right) \qquad (3.31)$$

Если система находится ниже порога линейной неустойчивости для возмущений с бесконечной длинной волны (т.е. когда $B_1 < 0$), то при $h < \sqrt{3}$ не существует растущих возмущений, в то время как возмущения с достаточно большим k нарастают при $h > \sqrt{3}$.

В дальнейшем будет рассматриваться система ниже порога линейной неустойчивости, то есть для отрицательных B_1. Преобразуем координаты и поля следующим образом:

$$x \to x\sqrt{\frac{B_0}{(-B_1)}\left[1-\frac{h_1^3\rho_2+h_2^3\rho_1}{3(h_1\rho_2+h_2\rho_1)}\right]},$$

$$t \to t\sqrt{\frac{h_1\rho_2+h_2\rho_1}{h_1h_2}\frac{B_0^3}{B_1^2}\left[1-\frac{h_1^3\rho_2+h_2^3\rho_1}{3(h_1\rho_2+h_2\rho_1)}\right]},$$

$$\eta \to \eta\frac{h_1\rho_2+h_2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\frac{(-B_1)}{B_0},$$

$$\varphi_1 \to \frac{\varphi}{h_1}\frac{h_1\rho_2+h_2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\left[1-\frac{h_1^3\rho_2+h_2^3\rho_1}{3(h_1\rho_2+h_2\rho_1)}\right]. \qquad (3.32)$$

После этого преобразования система (3.30) примет вид

$$\dot{\varphi} = \eta_{xx} + \frac{3}{2}\eta^2 - \eta, \qquad (3.33)$$

$$\dot{\eta} = -\varphi_{xx}. \qquad (3.34)$$

3.4. «Плюс»-уравнение Буссинеска и «классическое» уравнение Буссинеска для гравитационных волн на мелкой воде

Система уравнений (3.33)–(3.34)может быть переписана в виде «плюс»-уравнения Буссинеска:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} + \left(\frac{3}{2}\eta^2 + \eta_{xx}\right)_{xx} = 0. \qquad (3.35)$$

Широко используемое уравнение Буссинеска для гравитационных волн на мелкой воде [101] или в двухслойной системе без вибраций [99] имеет вид

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} - \left(\frac{3}{2}\eta^2 + \eta_{xx}\right)_{xx} = 0. \qquad (3.36)$$

Оба уравнения являются интегрируемыми и имеют хорошо изученные солитонные решения (см., например, [100,102,103]). Однако динамика этих уравнений существенно отличается. Для уравнения Буссинеска для волн на мелкой воде характерна коротковолновая неустойчивость, тогда как «плюс»-уравнение Буссинеска не имеет такой неустойчивости. Солитоны в «плюс»-уравнении могут быть неустойчивы: распадаться на пары устойчивых солитонов или взрывным образом формировать острые пики за конечное время [103,104,105].

Гравитационные волны малой амплитуды на мелкой воде описываются системой А уравнений Буссинеска (см. [101]), которая в введенных выше терминах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\eta} + \varphi_{xx} = -(\eta\,\varphi_x)_x + \dfrac{1}{6}\varphi_{xxxx}, \\ \dot{\varphi} + \eta = -\dfrac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \dfrac{1}{2}\dot{\varphi}_{xx}, \end{cases} \qquad (3.37)$$

где нелинейное и дисперсионное слагаемые в правой части уравнений малы. Тогда система (3.37) может быть упрощена и записана в виде

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} = \left((\varphi_x)^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \eta_{xx}\right)_{xx}. \qquad (3.38)$$

В правой части полученного уравнения собраны все малые слагаемые. Для волн, распространяющихся в одном направлении в ведущем порядке, можно считать

$(\varphi_x)^2 \approx (\dot{\varphi})^2 \approx \eta$, что приводит к уравнению (3.36). Таким образом, уравнение Буссинеска для классической задачи о волнах на мелкой воде не только недостоверно вдали от границы спектра солитонных скоростей (вблизи $c = 1$), но также неприменимо при рассмотрении столкновений волн, распространяющихся в противоположных направлениях (так как в этом случае $|\varphi_x| \neq |\dot{\varphi}|$). Уравнение, которое было получено нами, напротив, точно описывает динамику системы вблизи порога вибрационной неустойчивости для всего спектра скоростей солитонов и всех видов солитонных взаимодействий до тех пор, пока профиль поверхности раздела остается гладким.

3.5. Крупномасштабные волны ниже порога линейной неустойчивости системы

3.5.1 Линейные волны

Для начала рассмотрим распространение малых возмущений, соответствующих линейным волнам в системе (3.33)–(3.34). Для возмущений $(\eta, \varphi) \sim \exp(-i\Omega t + ikx)$ частота колебаний имеет вид

$$\Omega(k) = k\sqrt{1 + k^2}\,. \tag{3.39}$$

Соответствующая фазовая скорость

$$v_{\text{ph}} = \Omega \,/\, k = \sqrt{1 + k^2}\,, \tag{3.40}$$

групповая скорость, соответствующая распространению волновых пакетов,

$$v_{\text{gr}} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1 + 2k^2}{\sqrt{1 + k^2}}. \tag{3.41}$$

Видно, что минимальная групповая скорость в безразмерных терминах равняется 1 и монотонно уменьшается по мере увеличения длины волны возмущений (см. рисунок 3.2).

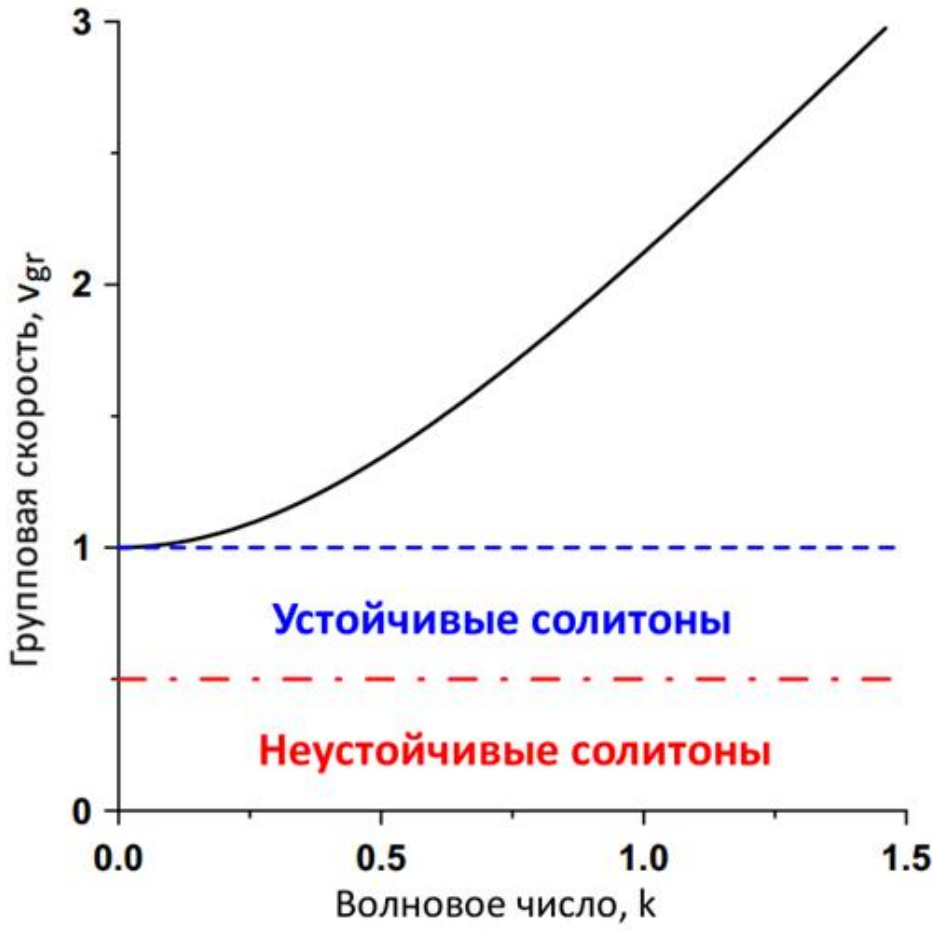


Рисунок 3.2. Двухслойная система несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций

3.5.2. Солитоны

Система (3.33)–(3.34) допускает решения в виде волн стационарного профиля, солитонов:

$$\eta(x,t) = \eta(x - ct),$$

где c — это скорость солитона. Тогда, с учетом $\partial_t \eta(x-ct) = -c\partial_x \eta(x-ct)$, для локализованных структур, которые исчезают при $x \to \pm\infty$, уравнение (3.34) может быть проинтегрировано: $\varphi' = c\eta$ (здесь штрих означает производную по аргументу). Тогда выражение (3.33) может быть записано в виде

$$0 = \eta'' + \frac{3}{2}\eta^2 - (1-c^2)\eta. \tag{3.42}$$

Последнее уравнение допускает решение вида

$$\eta_0(x,t) = \frac{1-c^2}{\cosh^2 \dfrac{\sqrt{1-c^2}(x \pm ct)}{2}}. \tag{3.43}$$

Семейство солитонных решений является однопараметрическим: решения параметризуются скоростью распространения c. Скорость c изменяется в интервале $[0,1]$; неподвижный солитон ($c = 0$) имеет наименьшую ширину и ннаибольшую высоту, а для быстрых солитонов ($c \to 1$) протяженность стремится к бесконечности, а высота стремится к нулю.

При $v_{\text{gr}} \geq 1$ (см. рисунок 3.2) и $c^2 \leq 1$, солитоны произвольной высоты движутся медленнее, чем любые малые возмущения плоского состояния. Максимальная скорость солитонов $c_{\max} = 1$ совпадает с минимальной групповой скоростью линейных волн. Быстрые солитоны, имеющие небольшую высоту и большую протяженность, распространяются со скоростью c, стремящиеся к 1 снизу, тогда как огибающая крупномасштабных линейных волн распространяется с групповой скоростью v_{gr}, стремящейся к 1 сверху. Это означает, что огибающие

солитонных пакетов небольшой высоты движутся быстрее, чем солитоны, образующие этот пакет [106,107].

3.6. Выводы

В текущей главе была рассмотрена динамика волн на внутренней поверхности в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций. Были получены уравнения динамики крупномасштабных волн ниже порога линейной устойчивости. Полученные уравнения позволяют исследовать структуры с нестационарным профилем, а также провести анализ устойчивости квазиравновесных структур. Было показано, что полученная система уравнений может быть приведена к виду «плюс»-уравнения Буссинеска.

ГЛАВА 4. ДИССИПАТИВНЫЕ СИЛЫ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Еще одним примером задачи, в которой динамика системы во многом определяется процессами на деформируемой границе контакта двух сред, является задача о динамическом контакте двух вязкоупругих тел. В настоящей главе данная задача решается для пары тел произвольной выпуклой формы с отличающимися материальными параметрами в квазистатическом приближении. В частности, находится величина диссипативной силы. Получаемые в данной главе результаты актуальны, например, при рассмотрении динамики гранулированных материалов.

4.1. Уравнение вязкоупругой среды

Когда два вязкоупругих тела вступают в контакт и деформируются, между ними возникают силы взаимодействия. В общем случае, они содержат как упругую, так и вязкую составляющие, но при статическом контакте возникает только упругая сила. Для вычисления сил взаимодействия необходимо найти напряжения, возникающие в телах при контакте, и проинтегрировать их по площади контакта. Распределение напряжений в материале определяется законом сохранения импульса (см., например, [62,66]), который в квазистатическом пределе принимает вид

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \nabla\cdot\hat{\sigma} = \nabla\cdot(\hat{\sigma}^{el} + \hat{\sigma}^{v}). \qquad (4.1)$$

Здесь ρ — это плотность материала, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ — поле смещения в точке $\vec{r}$ и $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, состоящий из упругой $\hat{\sigma}^{el}$ и вязкой $\hat{\sigma}^{v}$ частей. Упругие напряжения линейно зависят от тензора деформации

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right),$$

а именно [62,66]:

$$\sigma_{ij}^{el} = 2E_1 u_{ij} + \left(E_2 - \frac{2}{3}E_1\right) u_{kk}\delta_{ij}\,. \qquad (4.2)$$

Аналогично для вязких напряжений [62,66]:

$$\sigma_{ij}^{v} = 2\eta_1 \dot{u}_{ij} + \left(\eta_2 - \frac{2}{3}\eta_1\right) \dot{u}_{kk}\delta_{ij}\,.$$

Здесь $E_1 = Y\,/\,[2(1+\nu)]$ и $E_2 = Y\,/\,[3(1-2\nu)]$, где Y и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; η_1 и η_2 — коэффициенты динамической сдвиговой и объемной вязкости, соответственно; индексы i, j, k нумеруют декартовы координаты. Предлагаемое математическое описание соответствует модели Фойгта, к которой в случае достаточно медленного столкновения редуцируются более общие модели, учитывающие релаксацию напряжений и запаздывание деформаций [19].

Для рассмотрения пары тел (см. рисунок 4.1) обозначим поле смещения в верхнем теле, расположенным в области $z > 0$, как $\vec{u}(\vec{r})$, а поле смещений в нижнем теле ($z < 0$) — $\vec{w}(\vec{r}\,')$, причем для нижнего тела в качестве вертикальной координаты будет использоваться $z' = -z$, $\vec{r}\,' = (x, y, z')$.

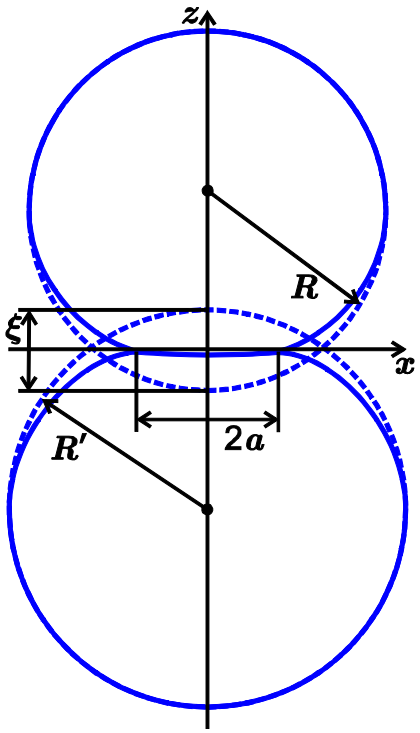


Рисунок 4.1. Взаимодействие двух вязкоупругих тел.

В физически реалистичных ситуациях деформации контактирующих твердых тел малы по сравнению с их размерами. В частности, область контакта и область существенной деформации тел малы по сравнению с радиусом кривизны контактирующих поверхностей, и, как следствие, задача о деформации каждого из тел может рассматриваться как задача о вдавливании изначально плоской границы вязкоупругого полупространства. Математически это означает, что поле $\vec{u}(\vec{r})$ задается в полупространстве $z > 0$, $\vec{w}(\vec{r}\,')$ — в полупространстве $z' > 0$, а граничные условия, как для области контакта, так и для свободных поверхностей тел в окрестности области контакта, задаются на плоскости $z = 0$ ($z' = 0$).

При решении задачи о контакте двух тел уравнения в объеме тел следует дополнить граничными условиями для полей деформации и напряжений. На поверхностях отсутствуют касательные напряжения:

$$\left(\sigma_{xz}^{el}(\vec{u}) + \sigma_{xz}^{v}(\vec{u})\right)\Big|_{z=0} = 0, \qquad \left(\sigma_{yz}^{el}(\vec{u}) + \sigma_{yz}^{v}(\vec{u})\right)\Big|_{z=0} = 0, \tag{4.3}$$

и аналогично для нижнего тела. Нормальные напряжения отсутствуют на свободной поверхности,

$$\left(\sigma_{zz}^{el}(\vec{u})+\sigma_{zz}^{v}(\vec{u})\right)\Big|_{z=0}=0, \tag{4.4}$$

а на поверхности контакта определяются внешним нормальным давлением P_z,

$$\left(\sigma_{zz}^{el}(\vec{u})+\sigma_{zz}^{v}(\vec{u})\right)\Big|_{z=0}=-P_z, \tag{4.5}$$

которое должно быть согласовано для верхнего и нижнего тел:

$$\left(\sigma_{zz}^{el}(\vec{u})+\sigma_{zz}^{v}(\vec{u})\right)\Big|_{z=0}=\left(\sigma_{z'z'}^{el}(\vec{w})+\sigma_{z'z'}^{v}(\vec{w})\right)\Big|_{z'=0}. \tag{4.6}$$

4.2. Метод возмущений

В большинстве случаев вязкие силы значительно меньше упругих, и материал контактирующих тел является достаточно твердым, что позволяет пренебречь инерционными эффектами для ударов, скорость которых можно считать малой. Оценим величину слагаемых в уравнении (4.1), для чего приведем его к безразмерному виду. В качестве характерного линейного масштаба области контакта выберем a. Тогда соответствующая характерная величина вдавливания поверхностей сталкивающихся тел оказывается $u_0 \sim a^2/R$, где R — характерная кривизна контактирующих поверхностей. В качестве масштаба времени выберем τ_c — продолжительность столкновения. Тогда $v_0 = u_0 / \tau_c$ является характерной скоростью удара. Таким образом,

$$\nabla\cdot\hat{\sigma}^{v} \sim \lambda_1 \nabla\cdot\hat{\sigma}^{el}, \qquad\qquad \lambda_1 = \tau_{rel} / \tau_c,$$

а для размерного соотношения $\rho\ddot{\vec{u}} \sim \nabla\cdot\hat{\sigma}^{el}$ имеем

$$\lambda_2 \ddot{\vec{u}} \sim \Delta \vec{u} + (1-2v)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u}, \quad \lambda_2 = (R/u_0)(v_0^2 / c^2).$$

Здесь $c^2 = Y / \rho$ и $\tau_{rel} = \eta / Y$ характеризуют соответственно скорость звука и время микроскопической релаксации материала, а $\eta \sim \eta_1 \sim \eta_2$ [66]. Из решения задачи Герца может быть сделана оценка для упругого столкновения: $(R/u_0) \sim (v_0/c)^{-4/5}$. В итоге, для параметра λ_2 получаем $\lambda_2 \sim (v_0/c)^{6/5}$.

Пренебрегая слагаемыми порядка λ_1 и λ_2, получаем

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}(\vec{u}) = 0, \qquad \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}(\vec{w}) = 0.$$

Это приближение дает результаты, аналогичные полученным в работах [62,64,65,108,109]. При сохранении слагаемых порядка λ_1 дает следующие выражения:

$$\nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(\vec{u}) + \hat{\sigma}^{v}(\dot{\vec{u}}) \right) = 0; \quad \nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(w) + \hat{\sigma}^{v}(\dot{\vec{w}}) \right) = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, чтобы выйти за рамки использовавшегося ранее подхода, необходимо найти решение уравнения (4.7), которое содержит оба поля смещений, а также их производные. Граничные условия для уравнения (4.7) соответствуют нулевым напряжениям на свободной поверхности.

В большинстве случаев $\lambda_1 = \tau_{rel} / \tau_c \ll 1$, что означает малость вязких напряжений по сравнению с упругими. Это позволяет использовать стандартный метод возмущений (см., например, [49]) для решения уравнения (4.7), с разложением искомого поля в ряд по малому параметру $\lambda \sim \lambda_1$. Тогда

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(0)} + \lambda \hat{\sigma}^{(1)} + \lambda^2 \hat{\sigma}^{(2)} + \ldots \tag{4.8}$$

и, соответственно,

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}^{(0)}(\vec{r}) + \lambda\vec{u}^{(1)}(\vec{r}) + \lambda^2\vec{u}^{(2)}(\vec{r}) + \dots, \tag{4.9}$$

$$\vec{w}(\vec{r}\,') = \vec{w}^{(0)}(\vec{r}\,') + \lambda\vec{w}^{(1)}(\vec{r}\,') + \lambda^2\vec{w}^{(2)}(\vec{r}\,') + \dots. \tag{4.10}$$

Подстановка выражений (4.8)–(4.10) в уравнение (4.7) дает набор уравнений разных порядков по λ. Уравнения нулевого порядка с соответствующими граничными условиями имеют вид

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}\left(\vec{u}^{(0)}\right) = 0, \qquad \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}\left(\vec{w}^{(0)}\right) = 0. \tag{4.11}$$

Уравнения первого порядка, в свою очередь, имеют вид

$$\nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(\vec{u}^{(1)}) + \hat{\sigma}^{v}(\vec{u}^{(0)})\right) = 0\,, \tag{4.12}$$

$$\nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(\vec{w}^{(1)}) + \hat{\sigma}^{v}(\vec{w}^{(0)})\right) = 0\,,$$

с аналогичным разложением граничных условий (4.3)–(4.6) и условием согласования смещений:

$$u_z^{(1)}(x,y,0) + w_{z'}^{(1)}(x,y,0) = 0\,. \tag{4.13}$$

И так далее для старших порядков.

4.3. Решение в ведущем порядке

Для упрощения обозначений на данном этапе мы не будем добавлять дополнительный индекс для обозначения тела: все характеристики относятся к рассматриваемому верхнему телу.

Для решения уравнения (4.13) применим подход, описанный в [66], и будем искать решение в виде

$$\vec{u}^{(0)} = f^{(0)}\vec{e}_z + \nabla\varphi^{(0)}. \tag{4.14}$$

Здесь $\varphi^{(0)} = K^{(0)}zf^{(0)} + \psi^{(0)}$, где $K^{(0)}$ — некоторая константа, которая будет найдена в ходе решения, $f^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$ — некоторые гармонические функции: $\Delta f^{(0)} = 0$, $\Delta\psi^{(0)} = 0$. Мы предполагаем, что на поверхности контакта отсутствуют тангенциальные напряжения, что выполняется, например, при взаимодействии тел из одинакового материала. Принимая во внимание, что

$$\Delta\vec{u}^{(0)} = \Delta\nabla\varphi^{(0)} = 2K^{(0)}\nabla\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z},$$

$$\nabla\cdot\vec{u}^{(0)} = (1+2K^{(0)})\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}, \tag{4.15}$$

перепишем уравнение (4.11) в виде:

$$\nabla_j\sigma_{ij}^{el(0)} = \left[2E_1K^{(0)} + +(1+2K^{(0)})\left(E_2 + \frac{E_1}{3}\right)\right]\nabla_i\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} = 0, \tag{4.16}$$

откуда следует

$$K^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{3E_2 + E_1}{3E_2 + 4E_1}. \tag{4.17}$$

Рассмотрим граничные условия (4.3)–(4.5) для тензора напряжений. На свободной границе все компоненты тензора напряжений отсутствуют. В зоне

контакта, расположенной в плоскости $z=0$, касательные напряжения $\sigma_{xz}^{el(0)}$ и $\sigma_{yz}^{el(0)}$ исчезают, а нормальные компоненты имеют вид

$$\vec{n}\vec{n}: \quad \hat{\sigma}^{el(0)} = \sigma_{zz}^{el(0)} = -P_z^{(0)},$$

где $\vec{n}=(0,0,-1)$ — вектор внешней нормали. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\sigma_{xz}^{el(0)}\Big|_{z=0}=0, \quad \sigma_{yz}^{el(0)}\Big|_{z=0}=0, \quad \sigma_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0}=-P_z^{(0)}. \tag{4.18}$$

Подставляя выражения (4.2) и (4.14) в (4.18), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3E_1}{4E_1+3E_2}f^{(0)}+2\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}=0, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3E_1}{4E_1+3E_2}f^{(0)}+2\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}=0, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f^{(0)}+2\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0}=-\frac{P_z^{(0)}}{E_1}. \tag{4.21}$$

Интегрирование уравнений (4.19) и (4.20) по координатам x и y дает следующее соотношение между $f^{(0)}$ и $\partial\psi^{(0)}/\partial z$ при $z=0$:

$$\left(\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}+\frac{3}{2}\frac{E_1}{4E_1+3E_2}f^{(0)}\right)\Bigg|_{z=0}=\mathrm{const}=0. \tag{4.22}$$

Константа в уравнении (4.22) равна нулю, так как, с одной стороны, она не зависит от координат, а с другой стороны, на бесконечности описываемая

функция должна равняться нулю. Так как $f^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ и $\partial\psi^{(0)}/\partial z$ являются гармоническими функциями, условие того, что их линейная комбинация на границе равняется нулю, означает, что она равняется нулю во всем объеме, т.е.

$$\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z} = -\frac{3}{2}\frac{E_1}{4E_1+3E_2} f^{(0)}. \tag{4.23}$$

Подставляя последнее выражение в (4.21), находим

$$\left.\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{4E_1+3E_2}{E_1(E_1+3E_2)} P_z^{(0)}. \tag{4.24}$$

Так как $f^{(0)}$ — гармоническая функция, к ней применимо следующее соотношение между нормальной производной гармонической функции на поверхности и ее значением во всем объеме, известное из теории гармонических функций (см., например,. [66,110]):

$$f^{(0)}(\vec{r}) = \frac{4E_1+3E_2}{2\pi E_1(E_1+3E_2)} \iint_S \frac{P_z^{(0)}(x_1,y_1)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}, \tag{4.25}$$

где S — область контакта. Используя выражение (4.14), можно написать в нулевом порядке z-компоненту смещения на границе $z=0$ в виде

$$\left.u_z^{(0)}\right|_{z=0} = (1+K^{(0)})\left.f^{(0)}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=0},$$

что, совместно с уравнением (4.23) и выражением для $K^{(0)}$ (4.17), дает

$$\left.u_z^{(0)}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}\left.f^{(0)}\right|_{z=0}. \tag{4.26}$$

При выражении E_1 и E_2 в терминах ν_1 и Y_1, получаем из (4.26) и (4.25):

$$u_z^{(0)}(x,y,z=0)=\frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1}\iint_S \frac{P_z^{(0)}(x_1,y_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}. \qquad (4.27)$$

Аналогичный вывод можно привести и для нижнего тела. Принимая во внимания то, что внешняя нормаль к верхнему и нижнему телам, так же как и внешнее давление, равны по модулю, но имеют противоположный знак, ($\vec{n}=\vec{n}_{\mathrm{up}}=-\vec{n}_{\mathrm{low}}$, $P_z=P_{z,\mathrm{up}}=-P_{z,\mathrm{low}}=P_{z',\mathrm{low}}$), получаем

$$w_{z'}^{(0)}(x,y,z'=0)=\frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2}\iint_S \frac{P_z^{(0)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}.$$

Согласно [108], давление $P_z^{(0)}$ определяется выражением

$$P_z^{(0)}(r)\Big|_{z=0}=-\sigma_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0}=\frac{3F^{el}}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad (4.28)$$

где F^{el} — полная упругая сила, действующая на тело, a и b — полуоси эллиптической области контакта поверхностей, выражения для них приведены в [66]. Эта задача контактного взаимодействия была решена Г. Герцем в 1882 [56]. Она описывает силы, возникающие при взаимодействии чисто упругих тел.

В случае сферических тел радиусом R и R' область контакта имеет форму круга, радиус которого определяется упрощенными выражениями для a и b:

$$a=b=\sqrt{\frac{RR'}{R+R'}}\xi.$$

4.4. Первая поправка

В данном разделе также подробно рассматривается только верхнее тело (при $z > 0$). Введем следующие обозначения:

$$\hat{\sigma}^{el}\left(\vec{u}^{(0)}\right) = \hat{\sigma}^{el(0)}, \qquad \hat{\sigma}^{el}\left(\vec{u}^{(1)}\right) = \hat{\sigma}^{el(1)},$$
$$\hat{\sigma}^{v}\left(\dot{\vec{u}}^{(0)}\right) = \hat{\sigma}^{v(1)}. \tag{4.29}$$

В этих терминах уравнения (4.2) и (4.15) дают:

$$\sigma_{ij}^{v}\left(\dot{\vec{u}}^{(0)}\right) = \sigma_{ij}^{v(1)} = \frac{\eta_1}{E_1}\dot{\sigma}_{ij}^{el(0)} + \left(\eta_2 - \eta_1\frac{E_2}{E_1}\right)(1+2K^{(0)})\frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z}\delta_{ij}. \tag{4.30}$$

Соответствующая дивергенция тензора напряжений, с учетом (4.16) и (4.17)

$$\begin{aligned}\nabla_j \sigma_{ij}^{v(1)} &= \left[2\eta_1 K^{(0)} + (1+2K^{(0)})\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{3}\right)\right]\nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z} \\ &= \frac{3(E_1\eta_2 - E_2\eta_1)}{4E_1 + 3E_2}\nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z},\end{aligned} \tag{4.31}$$

В уравнении (4.30) используем выражение (4.24) для $\partial \dot{f}^{(0)} / \partial z$ и выражение (4.17) для $K^{(0)}$, тогда zz-компонента тензора вязких напряжений на плоскости контакта $z = 0$:

$$\sigma_{zz}^{v(1)}(x,y,0) = \alpha\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(x,y,0), \tag{4.32}$$

$$\alpha = \frac{3\eta_2 + \eta_1}{E_1 + 3E_2}.$$

Аналогичное выражение может быть получено для нижнего тела.

Используя выражения для E_1 и E_2, для коэффициента α_i получаем

$$\alpha_i = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{Y_i}\left(2\eta_{2(i)} + \frac{2}{3}\eta_{1(i)}\right), \tag{4.33}$$

где индекс $i = 1,2$ обозначает номер тела, $i = 1$ для верхнего тела и $i = 2$ для нижнего. Приближение, предложенное в работе [62], и соответствующее результатам [64,65], ограничивается вычислением $\sigma_{zz}^{v(1)}(x, y, 0)$ и выражения для α_i. Заметим, однако, что такое приближение оказывается очевидно неправомерным в случае столкновения разнородных тел. В рамках этого приближения значение $\sigma_{zz}^{v(1)}$ на поверхности контакта отличается для нижнего и верхнего тел, так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Таким образом, третий закон Ньютона в этом случае не выполняется.

Кроме того, в результатах более ранних работ диссипативная сила исчезает при коэффициенте Пуассона $v = 1/2$, что соответствует материалам, у которых (как, например, у резины) объемный модуль упругости велик по сравнению со сдвиговым, $E_2/E_1 = [2(1+\nu)]/[3(1-2\nu)] \to \infty$. Такие материалы практически несжимаемы, однако сдвиговые деформации и сдвиговая вязкость для них не исчезают, а, следовательно, не может обращаться в ноль диссипация.

Рассмотрим первый порядок (4.12) для напряжений (4.29) в верхнем теле:

$$\nabla_j(\sigma_{ij}^{el(1)} + \sigma_{ij}^{v(1)}) = 0. \tag{4.34}$$

Вследствие линейности задачи, поле смещений в первом порядке можно представить в виде суммы двух слагаемых, $\vec{u}^{(1)} = \tilde{\vec{u}}^{(1)} + \overline{\vec{u}}^{(1)}$, которые отвечают двум частям тензора упругих напряжений:

$$\sigma_{ij}^{el(1)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)}(\tilde{\vec{u}}^{(1)}) + \overline{\sigma}_{ij}^{el(1)}(\overline{\vec{u}}^{(1)}).$$

Здесь первая часть $\sigma_{ij}^{el(1)}$ представляет собой решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями («свободные» границы):

$$\nabla_j \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -\nabla_j \sigma_{ij}^{v(1)}, \tag{4.35}$$

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\sigma}_{yz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\sigma}_{zz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = 0, \tag{4.36}$$

а вторая часть — решение однородного уравнения

$$\nabla_j \overline{\sigma}_{ij}^{el(1)} = 0, \tag{4.37}$$

с заданным на поверхности контакта смещением $\overline{u}_z^{(1)}$ и свободными границами за пределами области контакта. Уравнение (4.37) решается аналогично уравнению (4.12) для функции в первом порядке малости. Таким образом, решение имеет тот же вид, что и выражение (4.27) (напомним, $\sigma_{zz}(z=0) = -P_z$)

$$\overline{u}_z^{(1)}\Big|_{z=0} = -\frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1} \times \iint_S \frac{\overline{\sigma}_{zz}^{el(1)}(x_1, y_1, z=0 \mid \vec{u}^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|}. \tag{4.38}$$

Для решения задачи (4.35)–(4.36) представим поле смещения $\tilde{\vec{u}}^{(1)}$ в виде аналогичном виду решения в нулевом порядке:

$$\tilde{\vec{u}}^{(1)} = f^{(1)}\vec{e}_z + \nabla\varphi^{(1)}, \tag{4.39}$$

где $\varphi^{(1)} = K^{(1)} z f^{(1)} + \psi^{(1)}$, $K^{(1)}$ — некоторая константа, $f^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ — гармонические функции. Тогда тензор напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)}$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = (1+2K^{(1)})\left[E_1(\delta_{jz}\nabla_i f^{(1)} + \delta_{iz}\nabla_j f^{(1)}) + \left(E_2 - \frac{2}{3}E_1\right)\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}\delta_{ij}\right] +$$

$$+ 2E_1K^{(1)}z\nabla_i\nabla_j f^{(1)} + 2E_1\nabla_i\nabla_j\psi^{(1)}.$$

Если выбрать $K^{(1)} = -1/2$, тензор напряжений принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 z\nabla_i\nabla_j f^{(1)} + 2E_1\nabla_i\nabla_j\psi^{(1)},$$

а граничные условия

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0.$$

Так как на бесконечности производные $\psi^{(1)}$ равны нулю, то

$$\left.\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathrm{c}onst = 0,$$

и, по свойствам гармонических функций, $\psi^{(1)} = 0$ во всем объеме. Тогда

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 z\nabla_i\nabla_j f^{(1)}.$$

Третье граничное условие $\tilde{\sigma}_{zz}^{el(1)} = 0$ при $z = 0$ автоматически выполняется. Так как функция является гармонической, справедливо

$$\nabla_j \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 \nabla_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}.$$

Используя уравнения (4.31) и (4.35), последнее уравнение можно переписать в виде

$$E_1 \nabla_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z} = -\frac{3(E_2\eta_1 - E_1\eta_2)}{4E_1 + 3E_2} \nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z},$$

что определяет соотношение между функциями $f^{(1)}$ и $\dot{f}^{(0)}$:

$$f^{(1)} = -\beta \dot{f}^{(0)}, \tag{4.40}$$

$$\beta = \frac{3(E_2\eta_1 - E_1\eta_2)}{E_1(3E_2 + 4E_1)}. \tag{4.41}$$

Подставляя $K^{(1)} = -1/2$ и $\psi^{(1)} = 0$ в (4.39), имеем:

$$\tilde{u}_z^{(1)} = \frac{1}{2} f^{(1)} - \frac{z}{2} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z},$$

что совместно с (4.40) дает

$$\tilde{u}_z^{(1)} = -\frac{1}{2} \beta \left(\dot{f}^{(0)} - z \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z} \right),$$

где $f^{(0)}$ определяется выражением (4.25). Принимая во внимание соотношение между $f^{(0)}$ и $u_z^{(0)}$ на границе контакта (4.26) совместно с выражением (4.27) для $u_z^{(0)}$, получаем на поверхности $z = 0$

$$\tilde{u}_z^{(1)}\Big|_{z=0} = \frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1}\int\!\!\int_S \frac{\beta_1 \dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(x_1, y_1, z=0)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|}. \qquad (4.42)$$

Аналогично для нижнего тела:

$$\overline{w}_{z'}^{(1)}\Big|_{z'=0} = \frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2}\int\!\!\int_S \frac{\overline{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(x_1, y_1, z'=0 \mid \vec{w}^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}_1\right|}, \qquad (4.43)$$

и

$$\tilde{w}_{z'}^{(1)}\Big|_{z'=0} = \frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2}\int\!\!\int_S \frac{\beta_2 \dot{\sigma}_{z'z'}^{el(0)}(x_1, y_1, z'=0)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r}\,'-\vec{r}_1\right|}. \qquad (4.44)$$

Применяя условие согласованности нормальных напряжений (4.6) с учетом (4.32) для обоих тел,

$$\left(\alpha_1 \dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(\vec{u}^{(0)}) + \overline{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\vec{u}^{(1)})\right)\Big|_{z=0} = \left(\alpha_2 \dot{\sigma}_{z'z'}^{el(0)}(\vec{w}^{(0)}) + \overline{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\vec{w}^{(1)})\right)\Big|_{z'=0},$$

или

$$\overline{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\vec{w}^{(1)})\Big|_{z'=0} = (\alpha_1-\alpha_2)\,\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0} + \overline{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\vec{u}^{(1)})\Big|_{z=0}. \qquad (4.45)$$

Граничные условия (4.13) для вектора смещения,

$$u_z^{(1)} + w_{z'}^{(1)} = \overline{u}_z^{(1)} + \tilde{u}_z^{(1)} + \overline{w}_{z'}^{(1)} + \tilde{w}_{z'}^{(1)} = 0,$$

с учетом выражений(4.38), (4.42), (4.43) и (4.44) для $\overline{u}_z^{(1)}$, $\tilde{u}_z^{(1)}$, $\overline{w}_{z'}^{(1)}$ и $\tilde{w}_{z'}^{(1)}$, соответственно, дают

$$\int\int_S \left[(\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2)\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)} - D_1 \overline{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\vec{u}^{(1)}) - D_2 \overline{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\vec{w}^{(1)})\right]\Big|_{z=0} \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|} = 0, \quad (4.46)$$

где для краткости введены обозначения

$$D_i = \frac{1-\nu_i^2}{Y_i}, \qquad i = 1,2.$$

Уравнение (4.46) совместно с (4.45) дает нормальные упругие напряжения первого порядка малости на поверхности контакта

$$\overline{\sigma}_{zz}^{el(1)}(u^{(1)})\Big|_{z=0} = \left[\frac{\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2}{D_1 + D_2} - \frac{D_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{D_1 + D_2}\right]\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0}. \quad (4.47)$$

Принимая во внимание то, что полное напряжение в первом порядке на поверхности контакта имеет две составляющие — упругую, описываемую уравнением(4.47), и вязкую $\sigma_{zz}^{v(1)}$, описываемую уравнением (4.32), имеем

$$\sigma_{zz}^{(1)}\Big|_{z=0} = (\sigma_{zz}^{v(1)} + \sigma_{zz}^{el(1)})\Big|_{z=0} = A\,\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0}, \quad (4.48)$$

где

$$A = \frac{(\alpha_1 + \beta_1)D_1 + (\alpha_2 + \beta_2)D_2}{D_1 + D_2}.$$

Константа A с учетом выражений (4.33) и (4.41) может быть записана в виде

$$A = \frac{\gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2}{D_1 + D_2},$$

где

$$\gamma_i = \frac{1}{Y_i}\left(\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\right)\left[\frac{4}{3}\eta_{1(i)}(1-\nu_i+\nu_i^2)+\eta_{2(i)}(1-2\nu_i)^2\right].$$

4.5. Диссипативные силы

Найдем диссипативные силы, действующие между частицами. Величину этих сил можно получить интегрированием тензора напряжений первого порядка $\sigma_{zz}^{(1)}$, определяемого уравнением (4.48),

$$F_z^{v(1)} = \int\int_S \sigma_{zz}^{(1)}(x,y)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\int_S \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (4.49)$$

Здесь следует быть аккуратным с изменением порядка операций интегрирования по зависящей от времени площади контакта $S(t)$ и дифференцирования по времени. В общем случае, для вариации интеграла нормальных упругих напряжений по площади контакта при инфинитезимальной вариации параметра сближения от ξ до $\xi+\delta\xi$ имеем

$$\begin{aligned}
&\delta\int\int_{S(\xi)} \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int\int_{S(\xi)} (\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi+\delta\xi)\,|_{z=0} - \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi)\,|_{z=0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \quad (4.50)\\
&+ \int\int_{S(\xi+\delta\xi)-S(\xi)} \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi+\delta\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Как видно из (4.28), для решения задачи Герца нормальные напряжения $\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y)\,|_{z=0}$ по мере приближения к краю области контакта стремятся к нулю по коренному закону: $\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi)\,|_{z=0} \sim x_n^{1/2}$, где x_n — расстояние от границы

области контакта. В следствии чего последний интеграл в уравнении (4.50) по приращению области $S(\xi+\delta\xi)-S(\xi)$ пропорционален

$$\int_0^{a(\xi+\delta\xi)-a(\xi)} x_n^{1/2}\,\mathrm{d}\,x_n \sim \left[\frac{\delta a}{\delta\xi}\right]^{3/2}(\delta\xi)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\xi}\iint_{S(\xi)}\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{S(\xi)}\frac{\delta}{\delta\xi}\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\mid\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+O\Big[(\delta\xi)^{1/2}\Big].$$

Можно видеть, что в случае инфинитезимального приращения $\delta\xi$ последний вклад исчезающе мал, и воспользоваться тем, что $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\dfrac{\delta}{\delta\xi}$. Таким образом, получаем, что операции дифференцирования по времени и интегрирования по зависящей от времени области контакта коммутируют при условии, что нормальные напряжения достаточно быстро стремятся к нулю по мере приближения к границе этой области.

На основании равенства (4.49) имеем

$$F_z^{v(1)}=-A\dot{F}_z^{el(0)},$$

где $F_z^{el(0)}$ — нормальная составляющая силы, соответствующая упругой реакции среды. Она равняется силе Герца. В итоге получаем

$$F_z^{v(1)}=-\frac{3}{2}A\,C_0\sqrt{\xi}\dot{\xi}.$$

Здесь константа C_0 определяется геометрией сталкивающихся тел и их материальными свойствами, ξ — величина сближения тел по сравнению с недеформированным состоянием (см. рисунок 4.1).

Таким образом, полная сила, действующая между двумя вязкоупругими телами, в линейном по диссипативным константам приближении имеет вид

$$F_{\text{tot}} = C_0 \xi^{3/2} - \frac{3}{2} A C_0 \sqrt{\xi} \dot{\xi},$$

где соотношение между деформацией ξ и полуосями a и b эллиптической области соприкосновения, определяется аналогично статической теории Герца. Отметим однако, что в теории Герца деформация ξ однозначно связана с полной силой, действующей между телами, в отличие от полученных нами результатов, где размер области контакта определяет упругую составляющую силы, а скорость его изменения — диссипативную.

4.6. Выводы

В данной главе получено новое выражение для диссипативной силы, действующей между вязкоупругими телами в процессе столкновения. В отличие от теорий, предлагавшихся ранее, основанных на недостаточно строгих физически и математически подходах, наша теория использует полное самосогласованное физическое описание и математически строгий метод разложения по малому параметру, в роли которого выступает отношение времени микроскопической релаксации напряжений к продолжительности процесса столкновения. Вычислены слагаемые нулевого и первого порядка и определена величина диссипативной составляющей сил взаимодействия между телами. Новое выражение для диссипативной силы значительно отличается от предыдущих, оно позволяет верно описать взаимодействие тел из разных материалов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования

Глава 1. Кипение системы двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент

В первой главе рассмотрен процесс кипения на границе двух несмешивающихся жидкостей при температуре ниже температуры объемного кипения каждой из компонент. В работе построена полная теория кинетики процесса, выведены уравнения эволюции парового слоя и полей температуры жидкости. Найдено решение этих уравнений, соответствующее растущему паровому слою.

Также в этой главе проведен анализ задачи о срыве пузырьков пара с растущего парового слоя. Анализ проведен для двух случаев: случая системы, состояние которой близко к стратифицированному, и случая хорошо перемешанной системы (например, поднимающимися пузырьками пара при интенсивном парообразовании). На основе результатов этого анализа установлено характерное время роста парового слоя до его «обнуления» за счет срыва пузырьков, оценены максимальный и средний перегрев системы. Рассмотрена задача об остывании системы в отсутствии внешнего притока тепла; выделены три характерные стадии процесса.

Рассмотрен процесс горения жидкого топлива, налитого поверх более тяжелой негорючей жидкости, как один из возможных механизмов поддержания поверхностного кипения в системе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент.

Глава 2. Гравитационная неустойчивость тонкого слоя газа между двух толстых слоев жидкостей

Во второй главе рассмотрена задача о гравитационной неустойчивости тонкого слоя газа, заключенного между двумя горизонтальными слоями несмешивающихся жидкостей. Найден спектр инкремента возмущений в рассматриваемой системе. Для верификации полученного результата рассмотрены предельные случаи бесконечно тонкого и бесконечно широкого слоя газа. Показано, что в этом случае полученные результаты хорошо согласуются с известными ранее результатами, которые соответсвуют обычным гравитационно-капиллярным волнам на границе раздела жидкость–жидкость и жидкость–газ.

Показано, что в случае системы, достаточно протяженной в горизонтальном направлении, волновое число возмущений не ограничено снизу, и система всегда находится в неустойчивом состоянии. Вычислена длина волны наиболее опасной моды неустойчивости и ее инкремент. Зависимость найденного инкремента возмущений от толщины парового слоя имеет кубический характер.

Глава 3. Волны на горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях

В третьей главе была рассмотрена система двух горизонтальных слоев невязких несмешивающихся жидкостей, ограниченная твердыми горизонтальными стенками, в поле высокочастотных горизонтальных вибраций.

Были получены уравнения динамики длинноволновых структур ниже порога линейной устойчивости системы. Было показано, что полученная система уравнений может быть приведена к виду «плюс»-уравнения Буссинеска.

Было показано, что в описываемой системе могут возникать как устойчивые, так и неустойчивые солитонные решения, исследована их динамика. В зависимости от начальных возмущений, медленные неустойчивые солитоны

могут или распадаться на пару быстрых устойчивых солитонов с меньшей амплитудой, или приводить к взрывному формированию сингулярности.

Глава 4. Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел

В четвертой главе представлена теория, позволяющая вычислить диссипативные силы, действующие при столкновении двух вязкоупругих тел. Рассматривается случай взаимодействия тел произвольной выпуклой формы с отличающимися материальными параметрами при свободном проскальзывании соприкасающихся поверхностей. Динамика системы в квазистатическом приближении описывается уравнениями, совпадающими с уравнениями модели Фойгта.

При столкновении двух вязкоупругих тел возникают не только вязкие силы на границе контакта, но и объемные вязкие напряжения. В ранее опубликованных работах других авторов, эти объемные напряжения не учитывались, что приводило к внутренней несогласованности теории.

Для решения задачи используется подход, реализованный Л. Ландау для решения задачи Герца о контакте упругих тел выпуклой формы. В ходе решения используется строгий метод разложения по малому параметру, в качестве которого используется отношение времени микроскопической релаксации напряжений к продолжительности процесса столкновения. На первом этапе находится решение в ведущем порядке. Показано, что для поставленной задачи, оно полностью соответствует решению контактной задачи Герца. На втором этапе найдена поправка младшего порядка. Получено выражение для вычисления диссипативных сил, действующих между сталкивающимися телами.

Практические рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы

Полученные в рамках диссертационного исследования результаты могут быть востребованы при рассмотрении широкого круга явлений, происходящих в многофазных системах.

Результаты, полученные в первой и второй главах работы, позволяют глубже понять процесс кипения многофазных жидкостных систем. В дальнейшем, построенная теория может быть применена для решения прикладных задач химической промышленности. Интерес представляет изучение зависимости поведения системы от внешних параметров, например, от режима подвода тепла в систему.

Результаты третьей главы могут быть применены для вибрационного управления состояниями двухслойной системы несмешивающихся жидкостей. Метод, используемый при выводе уравнений динамики волн на границе раздела, может применяться для изучения многофазных систем различной конфигурации.

Результаты четвертой главы имеют фундаментальное значение для развития теории контактного взаимодействия, они могут оказаться полезными для исследования динамики различных гранулированных систем. Разработанный подход к аналитическому вычислению деформаций в окрестности поверхности контакта двух упругих тел при наличии распределенной объемной силы может применяться для решения широкого круга различных задач (например, для решения задачи о влиянии адгезии при динамическом контакте).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жаров В.Т., Серафимов Л.А. Физико-химические основы дистилляции и ректификации. – Л.: Химия, 1975.
2. Randall M., Avila W. The boiling point-composition diagram of immiscible and partially miscible liquid systems //J. Chem. Educ. – 1940. – Vol. 17. – №. 11. – P. 536.
3. Химическая энциклопедия. – Т.4. – М.: Советская энциклопедия, 1995. – С. 559–560
4. Simpson H. C., Beggs G. C., Nazir M. Evaporation of butane drops in brine // Desalination. – 1974. – Vol. 15. – №. 1. – P. 11–23.
5. Celata G. P., Cumo, M., D'Annibale, F., Gugliermetti, F., Ingui, G. Direct contact evaporation of nearly saturated R 114 in water // International journal of heat and mass transfer. – 1995. – Vol. 38. – №. 8. – P. 1495–1504.
6. Roesle M. L., Kulacki F. A. An experimental study of boiling in dilute emulsions, part A: Heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2012. – Vol. 55. – №. 7. – P. 2160–2165.
7. Roesle M. L., Kulacki F. A. An experimental study of boiling in dilute emulsions, part B: Visualization //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2012. – Vol. 55. – №. 7. – P. 2166–2172.
8. Sideman S., Isenberg J. Direct contact heat transfer with change of phase: Bubble growth in three-phase systems // Desalination. – 1967. – Vol. 2. – №. 2. – P. 207–214.
9. Mokhtarzadeh M. R., El-Shirbini A. A. A theoretical analysis of evaporating droplets in an immiscible liquid //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1979. – Vol. 22. – №. 1. – P. 27–38.
10. Raina G. K., Wanchoo R. K. Direct contact heat transfer with phase change: Theoretical expression for instantaneous velocity of a two-phase bubble

//International communications in heat and mass transfer. – 1984. – Vol. 11. – №. 3. – P. 227–237.

11. Kendoush A. A. Theory of convective drop evaporation in direct contact with an immiscible liquid // Desalination. – 2004. – Vol. 169. – №. 1. – P. 33–41.
12. Kadoguchi K. Bubble departure in the direct-contact boiling field with a continuous liquid–liquid interface //Experimental thermal and fluid science. – 2007. – Vol. 31. – №. 3. – P. 197–207.
13. Lord Rayleigh (Strutt J.W.). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1883. – Vol. 14. – P. 170–177.
14. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 1950. – Vol. 201. – №. 1065. – P. 192–196.
15. Lewis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II //Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 1950. – Vol. 202. – №. 1068. – P. 81–96.
16. Emmons H. W., Chang C. T., Watson B. C. Taylor instability of finite surface waves //Journal of Fluid Mechanics. – 1960. – Vol. 7. – №. 02. – P. 177–193.
17. Cole R. L., Tankin R. S. Experimental study of Taylor instability //Physics of Fluids (1958-1988). – 1973. – Vol. 16. – №. 11. – P. 1810–1815.
18. Ratafia M. Experimental investigation of Rayleigh-Taylor instability //Physics of Fluids (1958-1988). – 1973. – Vol. 16. – №. 8. – P. 1207–1210.
19. Bellman R., Pennington R. H. Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability //Quarterly of Applied Mathematics. – 1954. – P. 151–162.
20. Kruskal M., Schwarzschild M. Some instabilities of a completely ionized plasma //Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and

Engineering Sciences. – The Royal Society, 1954. – Vol. 223. – №. 1154. – P. 348–360.

21. Birkhoff G. Note on Taylor instability //Quarterly of Applied Mathematics. – 1954. – Vol. 12. – №. 3. – P. 306–309.
22. Plesset M. S. On the stability of fluid flows with spherical symmetry //Journal of Applied Physics. – 1954. – Vol. 25. – №. 1. – P. 96–98.
23. Kull H. J. Theory of the Rayleigh-Taylor instability //Physics Reports. – 1991. – Vol. 206. – №. 5. – P. 197–325.
24. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. – Courier Corporation, 2013.
25. Birkhoff G. Taylor instability and laminar mixing. – Los Alamos Scientific Lab., N. Mex., 1954. – №. LA–1862.
26. Саранин В. А. Равновесие жидкостей и его устойчивость // М: Изд. Институт компьютерных исследований. – 2002.
27. Kim B. J., Kim K. D. Rayleigh-Taylor instability of viscous fluids with phase change //Physical Review E. – 2016. – Vol. 93. – №. 4. – P. 043123.
28. Berenson P. J. Film-boiling heat transfer from a horizontal surface //Journal of Heat Transfer. – 1961. – Vol. 83. – №. 3. – P. 351-356.
29. Hamill T. D., Baumeister. K.J. Film boiling heat transfer from a horizontal surface as an optimal boundary value process // Chemical Engineering Progress. – 1966. – Vol. 62. – №. 8. – P. 83.
30. Ruckenstein E. Film boiling on a horizontal surface //International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1967. – Т. 10. – №. 7. – С. 911-919.
31. Frederking T. H. K., Wu Y. C., Clement B. W. Effects of interfacial instability on film boiling of saturated liquid helium I above a horizontal surface //AIChE Journal. – 1966. – Т. 12. – №. 2. – С. 238-244.
32. Moureau J. C. Analysis of pool film boiling. Thesis. – Georgia Institute of Technologies, 1972.

33. Sharp D.H. An Overview of Rayleigh-Taylor Instability // Physica. – 1984. – Vol. 12D. – P. 3–18.
34. Wolf G. H. The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // Zeitschrift für Physik. – 1969. – Vol. 227. – №. 3. – P. 291–300.
35. Wolf G. H. Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid-gas interface //Physical Review Letters. – 1970. – Vol. 24. – №. 9. – P. 444.
36. Troyon F., Gruber R. Theory of the dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability. – 1970. – №. CRPP-REPORT-1970-004.
37. Любимов Д.В., Черепанов А.А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. – 1986. – №6. – С. 8–13.
38. Lyubimov D. V., Khenner M. V., Shotz M. M. Stability of a fluid interface under tangential vibrations // Fluid dynamics. – 1998. – Vol. 33. – №. 3. – P. 318–323.
39. Khenner M. V., Lyubimov D.V., Belozerova T.Z., Roux B. Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system // arXiv preprint physics/9908007. – 1999.
40. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А., Динамика поверхностей разделав вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003.
41. Замараев А.В., Любимов Д.В., Черепанов А.А. О равновесных формах поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Гидродинамика и процессы тепломассообмена. Свердловск: УрО АН СССР, 1989. – С. 23–26.
42. Shklyaev S., Alabuzhev A. A., Khenner M. Influence of a longitudinal and tilted vibration on stability and dewetting of a liquid film // Physical Review E. – 2009. – Vol. 79. – №. 5. – P. 051603.
43. Benilov E. S., Chugunova M. Waves in liquid films on vibrating substrates // Physical Review E. – 2010. – Vol. 81. – №. 3. – P. 036302.
44. Herrmann H. J., Hovi J. P., Luding S. (ed.). Physics of dry granular media. – Springer Science & Business Media, 2013.

45. Jaeger H. M., Nagel S. R., Behringer R. P. Granular solids, liquids, and gases // Reviews of modern physics. – 1996. – Vol. 68. – №. 4. – P. 1259.
46. Hinrichsen H., Wolf D. E. (ed.). The physics of granular media. – John Wiley & Sons, 2006.
47. Duran J. Sands, powders, and grains: an introduction to the physics of granular materials. – Springer Science & Business Media, 2012.
48. Greenberg R., Brahic A. Planetary Rings. – Tucson: The University of Arizona Press, 1984.
49. Brilliantov N. V., Pöschel T. Kinetic theory of Granular Gases. – Oxford: Oxford University Press, 2004.
50. Pöschel T, Luding S. Granular Gases // Vol. 564 of Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 2001.
51. Pöschel T., Brilliantov N. V. Granular Gas Dynamics // Vol. 624 of Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 2003.
52. Barrat A., Trizac E., Ernst M. H. Granular gases: dynamics and collective effects // J. Phys.: Condens. Matter. – 2005. – Vol. 17. – P. 2429–2437.
53. Wildman R. D, Parker D. J. Coexistence of Two Granular Temperatures in Binary Vibrofluidized Beds // Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 88. – 064301.
54. Feitosa K., Menon N. Breakdown of Energy Equipartition in a 2D Binary Vibrated Granular Gasb //Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 88. – 198301.
55. Zik O., Levine D., Lipson S., Shtrikman S., Stavans J. Rotationally induced segregation of granular materials // Physical Review Letters. – 1994. – Vol. 73. – P. 644–647.
56. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. f. reine u. angewandte Math –. 1882. – Vol. 92. – P. 156–171.
57. Poeschel T., Schwager T. Computational Granular Dynamics. – Berlin: Springer, 2005.
58. Luding S. Towards dense, realistic granular media in 2D // Nonlinearity. 2009. – Vol. 22. – P. 101–146.

59. Poeschl T. Versuch einer Erweiterung der Hertzschen Theorie des Stoßes auf plastische Körper // Z. Phys. – 1928. – Vol. 46. – P. 142–146.
60. Montaine M., Heckel M., Kruelle C., Schwager T., Poeschel T. Coefficient of restitution as a fluctuating quantity // Physical Review E. – 2011. – Vol. 84. – 041306.
61. Pao Y. H. Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case // Journal of Applied Physics. – 1955. – Vol. 26. – P. 1083–1088.
62. Brilliantov N., Spahn F., Hertzsch J., Pöschel T. Model for collisions in granular gases // Physical Review E. – 1996. – Vol. 53. – P. 5382–5392.
63. Kuwabara G., Kono K. Restitution coefficient in a collision between two spheres // Japanese Journal of Applied Physics. – 1987. – Vol. 26. – Part 1. – No. 6.– P. 1230–1233.
64. Zheng Q. J., Zhu H. P., Yu A. B. Finite element analysis of the contact forces between a viscoelastic sphere and rigid plane // Powder Technology. – 2012. – Vol. 226. – P. 130–142.
65. Zheng Q. J, Zhou Z.Y., Yu A.B. Contact forces between viscoelastic ellipsoidal particles // Powder Technology. – 2013. – Vol. 248. – P. 25–33.
66. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория упругости. – М.: Наука, 1987
67. Пименова А.В., Голдобин Д.С. Кипение на границе двух несмешивающихся жидкостей ниже температуры объемного кипения каждой из компонент // ЖЭТФ. 2014. Т. 146, № 1. С. 105–115.
68. Pimenova A.V., Goldobin D.S. Boiling of the interface between two immiscible liquids below the bulk boiling temperatures of both components // European Physical Journal E. – 2014. – Vol. 37. – P. 108–17.
69. Пименова А.В., Голдобин Д.С. Гравитационная неустойчивость тонкого слоя газа между двумя толстыми слоями жидкостей // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8. – № 2. – С. 200–207.

70. Goldobin D.S., Pimenova A.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Running interfacial waves in two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // Physical Review E. – 2015. – Vol. 91. – P. 053010–10.
71. Brilliantov N.V., Pimenova A.V., Goldobin D.S. A dissipative force between colliding viscoelastic bodies: Rigorous approach // Europhysics Letters. – 2015. – Vol. 109. – P. 14005–6.
72. Goldobin D.S., Susloparov E.A., Pimenova A.V., Brilliantov N.V. Collision of viscoelastic bodies: Rigorous derivation of dissipative force // European Physical Journal E. – 2015. – Vol. 38. – P. 55–9.
73. Goldobin D.S., Pimenova A.V. Specific interface area and self-stirring in a two-liquid system experiencing intense interfacial boiling below the bulk boiling temperatures of both components // ARXIV. 2016. Eprint arXiv:1606.09520. [Электронный ресурс]. URL: http://arxiv.org/abs/1606.09520 (Дата обращения: 30.06.2016).
74. Голдобин Д.С., Пименова А.В., Суслопаров Е.А., Бриллиантов Н.В. Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2016. – № 1 (32). С. 33–42.
75. Goldobin D.S., Pimenova A.V. Assessment of the dependence of (dS/dV) on the heat influx for a well-stirred two-phase system with interfacial boiling // Материалы XVII Всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем". Красноярск, Академгородок, 3–5 октября 2014. – Красноярск, 2014. С. 47–51.
76. Pimenova A.V., Goldobin D.S. Gravitational instability of thin vapour layer between two liquid half-spaces // Материалы XVII Всероссийского семинара "Моделирование неравновесных систем". Красноярск, Академгородок, 3–5 октября 2014. – Красноярск, 2014. С. 118–124.
77. Пименова А.В., Голдобин Д.С. Гравитационная неустойчивость тонкого парового слоя, заключенного между двумя слоями жидкостей // XIX Зимняя

школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. С. 241.

78. Голдобин Д.С., Пименова А.В., Ковалевская К.В., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Бегущие волны на границе раздела в двухслойной системе невязких жидкостей, подверженной горизонтальным вибрациям // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. С. 83.
79. Пименова А.В., Голдобин Д.С., Бриллиантов Н.В., Суслопаров Е.А. Диссипативные силы при столкновении двух вязкоупругих тел // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 24–27 февраля 2015. – Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2015. С. 242.
80. Goldobin D.S., Pimenova A.V. Self-Stirring of a Two-Liquid System with Vapour Generation on the Liquid-Liquid Interface // IMA8 — 8th Conf. of the Int. Marangoni Association: Book of Abstracts. Bad Honnef, Germany, June 12 – 16, 2016. – Cottbus: Brandenburgische Technische Universität, 2016. P. 32.
81. Goldobin D.S., Pimenova A.V., Lyubimova T.P. Interfacial Waves in Inviscid Two-Layer Liquid System Subject to Longitudinal Vibrations // IMA8 — 8th Conf. of the Int. Marangoni Association: Book of Abstracts. Bad Honnef, Germany, June 12 – 16, 2016. – Cottbus: Brandenburgische Technische Universität, 2016. P. 31.
82. Bergman T. L., Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Lavine, A. S Fundamentals of heat and mass transfer. – John Wiley & Sons, 2011.
83. Кнаке О., Странский И.Н. Механизм испарения // УФН. -1959. – Т. 68. – № 2. – С. 261–305.
84. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. О гидродинамических граничных условиях при испарении и конденсации // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1959. – Т. 37. – №. 1. – С. 125.

85. Анисимов С. И., Рахматулина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1973. – Т. 64. – С. 869–876.
86. Gordon K. F., Singh T., Weissman E. Y. Boiling heat transfer between immiscible liquids // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1961. – Vol. 3. – №. 2. – P. 90–93.
87. Prakash C. B., Pinder K. L. Direct contact heat transfer between two immiscible liquids during vaporisation // The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 1967. – Vol. 45. – №. 4. – P. 210–214.
88. Prakash C. B., Pinder K. L. Direct contact heat transfer between two immiscible liquids during vaporization: Part II: Total evaporation time // The Canadian Journal of Chemical Engineering. – 1967. – Vol. 45. – №. 4. – P. 215–220.
89. Somer T. G. et al. Heat transfer to an immiscible liquid mixture and between liquids in direct contact // Desalination. – 1973. – Vol. 13. – №. 3. – P. 231–249.
90. Filipczak G., Troniewski L., Witczak S. Pool Boiling of Liquid-Liquid Multiphase Systems. – INTECH Open Access Publisher, 2011.
91. Anisimov S. I., Rakhmatulina A. K. The dynamics of the expansion of a vapor when evaporated into a vacuum // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1973. – Vol. 37. – P. 441.
92. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Физматлит, 2001.
93. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния // М.,«Наука. – 1978.
94. Wang C.Y. The three-dimensional flow due to a stetching flat surface // Physics of Fluids. – 1984. – Vol. 27. – P. 1915–1917.
95. Thiele U., Vega J. M., Knobloch E. Long-wave Marangoni instability with vibration // Journal of Fluid Mechanics. – 2006. – Vol. 546. – P. 61–87.

96. Nepomnyashchy A. A., Simanovskii I. B. The influence of vibration on Marangoni waves in two-layer films // Journal of Fluid Mechanics. – 2013. – Vol. 726. – P. 476–496.
97. Голдобин Д. С., Любимов Д. В. Термоконцентрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2007. – Т. 131. – №. 5. – С. 949–956.
98. Watson E. J. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane // Journal of Fluid Mechanics. – 1964. – Vol. 20. – №. 03. – P. 481–499.
99. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – Vol. 396. – P. 1–36.
100. Manoranjan V. S., Mitchell A. R., Morris J. L. Numerical solutions of the good Boussinesq equation // SIAM journal on scientific and statistical computing. – 1984. – Vol. 5. – №. 4. – P. 946–957.
101. Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. – 1872. – P. 55–108.
102. Manoranjan V. S., Ortega T., Sanz-Serna J. M. Soliton and antisoliton interactions in the ‘‘good’’Boussinesq equation // Journal of mathematical physics. – 1988. – Vol T. 29. – №. 9. – P. 1964–1968.
103. Bogdanov L. V., Zakharov V. E. The Boussinesq equation revisited // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2002. – Vol. 165. – №. 3. – P. 137–162.
104. Bona J. L., Sachs R. L. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation // Communications in Mathematical Physics. – 1988. – Vol. 118. – №. 1. – P. 15–29.
105. Liu Y. Instability of solitary waves for generalized Boussinesq equations // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1993. – Vol. 5. – №. 3. – P. 537–558.

106. Akylas T. R. Envelope solitons with stationary crests // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993). – 1993. – Vol. 5. – №. 4. – P. 789–791.
107. Longuet-Higgins M. S. Capillary–gravity waves of solitary type and envelope solitons on deep water // Journal of Fluid Mechanics. – 1993. – Vol. 252. – P. 703–711.
108. Brilliantov N. V., Albers N., Spahn F., Pöschel T. Collision dynamics of granular particles with adhesion // Phys. Rev. E. – 2007. – Vol. 76. – 051302.
109. Dintwa E., van Zeebroeck M., Ramon H. Torsional stiffness of viscoelastic spheres in contact // Eur. J. Phys. B. – 2004. – Vol. 39. – P. 77–85.
110. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.
111. Goldobin D. S., Brilliantov N. V. Diffusive counter dispersion of mass in bubbly media // Physical Review E. – 2011. – Vol. 84. – №. 5. – P. 056328
112. Chapman S., Cowling T. G. The mathematical theory of non-uniform gases: an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. – Cambridge university press, 1970.
113. Wilke C. R. A viscosity equation for gas mixtures // The journal of chemical physics. – 1950. – Vol. 18. – №. 4. – P. 517–519.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ОЦЕНКА ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРА ПЕРЕМЕШАННОСТИ СИСТЕМЫ $(\delta S \,/\, \delta V)$ ОТ ВНЕШНЕГО ПРИТОКА ТЕПЛА

В данном приложении находится зависимость между макроскопическим параметром перемешанности системы $(\delta S \,/\, \delta V)$ и притоком тепла на единицу объема $\dot{Q}_V = \delta Q \,/\, (\delta V \delta t)$ в статистически установившемся процессе кипения.

При интенсивном кипении всплывающие пузырьки пара активно перемешивают систему, в то время как сила тяжести и поверхностное натяжение, напротив, пытаются уменьшить площадь контакта и вернуть систему к исходному стратифицированному состоянию. Так как теплота фазового перехода огромна по сравнению с реальными значениями кинетической энергии микроскопического движения и потенциальной энергией в поле силы тяжести, можно считать, что все тепло, поступающее в систему, тратится на парообразование:

$$\dot{Q}_V V \to (\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}) \dot{V}_v \,,$$

где V — это объем системы, а $\dot{V}_v$ — объем пара, выделяемы за единицу времени. Отсюда,

$$\dot{V}_v = \frac{\dot{Q}_V V}{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}}. \tag{A.1}$$

Потенциальная энергия всплывающего пузырька равняется

$$\rho_l V_v g h \,/\, 2 \,,$$

где h — характерный линейный размер системы, $h \sim V^{1/3}$, ρ_l — средняя плотность жидкостей (пар считается невесомым). Эта энергия частично переходит в кинетическую энергию потока жидкости, потенциальную энергию перемешанной двухкомпонентной системы, энергию поверхностного натяжения и частично рассеивается вязкими силами. В случае статистически установившегося процесса кипения, механическая кинетическая и потенциальная энергии в среднем по времени остаются постоянными и весь приток энергии должен рассеиваться под действием вязких сил, т.е.

$$\rho_l V_v g h / 2 \to \dot{W}_{l,k} \tau ,$$

где $\dot{W}_{l,k}$ — скорость рассеивания энергии, τ — время образования объема пара V_v, $V_v = \dot{V}_v \tau$. Таким образом,

$$\rho_l \dot{V}_v g \frac{h}{2} \sim \dot{W}_{l,k}. \tag{A.2}$$

Проведем оценку диссипации кинетической энергии потока $W_{l,k}$ вязкими силами;

$$\begin{aligned} \dot{W}_{l,k} &= \int_V \vec{v} \cdot \vec{f}_{\text{vis}} \, \mathrm{d}V \sim \int_V \vec{v} \cdot \left(-\eta_l \frac{\vec{v}}{H^2} \right) \mathrm{d}V \\ &\sim -\frac{\eta_l}{\rho_l} \frac{2}{\left(\frac{H_1 + H_2}{2} \right)^2} \int_V \frac{\rho_l v^2}{2} \, \mathrm{d}V \sim -8\nu_l \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)^2 W_{l,k} . \end{aligned} \tag{A.3}$$

Здесь $\vec{v}$ — это скорость жидкости, $\vec{f}_{\text{vis}}$ — вязкие силы, действующие на единицу объема, H — характерный пространственный масштаб неоднородности потока, η_l и ν_l — характерные динамическая и кинематическая вязкости жидкостей.

Далее найдем соотношение между кинетической энергией течения и механической потенциальной энергией в системе. Поднимающиеся пузырьки пара сообщают системе механическую энергию. Стохастическая динамика системы определяется силами поверхностного натяжения и силой тяжести. Если для консервативной системы можно говорить о термолизации состояния, и она находится в состоянии термодинамического равновесия, то кинетическая и потенциальная компоненты общей энергии системы, которые соответствуют квадратичным слагаемым в гамильтониане, должны быть равны. В случае произвольного степенного вида слагаемых в гамильтониане, эти компоненты энергии должны оставаться однго порядка:

$$W_{l,k} \sim W_{l,pg} + W_{l,p\sigma}\,, \qquad \text{(A.4)}$$

где $W_{l,pg}$ — потенциальная энергия в поле тяжести, а $W_{l,p\sigma}$ — энергия поверхностного натяжения. Стратифицированное состояние системы с плоской поверхностью раздела выберем за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия хорошо перемешанной системы в поле тяжести

$$W_{l,pg} \sim \Delta\rho_l V g \frac{h}{2},$$

где $\Delta\rho_l$ — разность плотности двух компонент. Энергия поверхностного натяжения

$$W_{l,p\sigma} \sim (\sigma_1 + \sigma_2) V \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right).$$

Так как между двумя слоями жидкости находится паровая прослойка, эффективный коэффициент поверхностного натяжения равняется сумме $(\sigma_1 + \sigma_2)$, а не σ_{12}, как это было бы в случае отсутствия этой прослойки.

Объединяя (А.1)–(А.4), получаем

$$\rho_l \frac{\dot{Q}_V V}{\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}} g \frac{h}{2} \approx 8\nu_l \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)^2 \left[\Delta\rho_l V g \frac{h}{2} + (\sigma_1 + \sigma_2) V \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) \right].$$

Это выражение можно упростить:

$$\dot{Q}_V \approx B \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{k_{12}^2 h} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) \right], \qquad \text{(А.5)}$$

где $B = 8\nu_l (\Lambda_1 n_{1*}^{(0)} + \Lambda_2 n_{2*}^{(0)}) \Delta\rho_l \,/\, \rho_l$, а k_{12} определяется из (2.21). Можно заметить, что отношение величин первого и второго слагаемого в скобке правой части выражения (А.5) определяется размером системы h.

Для системы вода–*н*-гептан, $B \approx 1.5\,\text{Дж}/(\text{м}\times\text{с})$ и $l_{k_{12}} \equiv 1 \,/\, k_{12} \approx 0.5\,\text{см}$. Для хорошо перемешанной системы отношение $(\delta S \,/\, \delta V)^{-1} \ll h$. Среднее геометрическое от этих двух величин может быть как меньше, так и больше величины $l_{k_{12}}$:

1. $h \cdot (\delta S \,/\, \delta V)^{-1} \ll l_{k_{12}}^2$ соответствует случаю, когда доминирующую роль в системе играет поверхностное натяжение,

2. $h \cdot (\delta S \,/\, \delta V)^{-1} \gg l_{k_{12}}^2$ соответствует случаю, когда основную роль играет действие силы тяжести.

Кубическое уравнение (А.5) пропускает только положительные решения, вещественные для любого отношения $\dot{Q}_V \,/\, B$;

$$\left(\frac{\delta S}{\delta V}\right) = \left(\frac{\delta S}{\delta V}\right)_g \cdot G\left(\frac{(\dot{Q}_V \,/\, B)^{1/2}}{k_{12}^2 V^{1/3}}\right), \qquad \text{(А.6)}$$

где $(\delta S \,/\, \delta V)_g = (\dot{Q}_V \,/\, B)^{1/2}$ — значение параметра $(\delta S \,/\, \delta V)$, характерное для систем, в которых доминирующую роль играет сила тяжести, функция

$$G(s) = (6s)^{-1}(R + R^{-1} - 1),\ R = (\sqrt{27}s + \sqrt{27s^2 - 1})^{2/3};$$

отметим асимптотические свойства: $G(0) = 1$ и $G(s \gg 1) = (2s)^{-1/3}$.

Выражение (А.6) позволяет оценить величину параметра $(\delta S \,/\, \delta V)$ в зависимости от притока тепла в систему.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ В СЛОЕ ПАРА

В данном приложении будет рассмотрено распределение концентрации частиц внутри парового слоя, образующегося на границе раздела двух жидкостей в процессе их испарения и линейно растущего со временем.

Как показано в разделе 1.2.2, для идеально «симметричного» случая (т.е. для случая, когда материальные параметры двух жидкостей одинаковы) задача имеет точное решение, при котором $L \sim t$, $\Theta \sim t$, а профиль концентрации частиц внутри пара является линейным. Логично предположить, что близкое к этому решение должно существовать и для случая, когда жидкости отличны друг от друга. В связи с этим, будем искать решение уравнения (1.49) с граничными условиями (1.50)–(1.53) в виде полиномиального ряда

$$n_1(z,t) = n_{1*}^{(0)} - \gamma_2\Theta(t) + \alpha(z + L_2(t)) + \beta(z - L_1(t))(z + L_2(t)) + \ldots, \quad \text{(B.1)}$$

$$n_2(z,t) = n_{2*}^{(0)} - \gamma_1\Theta(t) - \alpha(z - L_1(t)) - \beta(z - L_1(t))(z + L_2(t)) + \ldots , \quad \text{(B.2)}$$

и проверим, будут ли слагаемые этого ряда пропорциональны степеням некоторого малого параметра таким образом, чтобы можно было пренебречь всеми слагаемыми, кроме ведущего, линейного по z, слагаемого. Квадратичные по z слагаемые умышленно сформированы таким образом, чтобы на границе слоя они обращались в нуль. Из граничных условий (1.50)–(1.53) следует,

$$\alpha = (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{\Theta}{L}. \quad \text{(B.3)}$$

Уравнение (1.49) дает

$$-\gamma_2\dot{\Theta} + \alpha\dot{L}_2 = 2D_{12}\beta, \quad \text{(B.4)}$$

$$-\gamma_1\dot{\Theta}+\alpha\dot{L}_1=-2D_{12}\beta. \qquad \text{(B.5)}$$

С другой стороны, уравнения (1.54)–(1.55) принимают вид

$$\dot{L}_1=\frac{D_{12}}{n_{2*}^{(0)}}(\alpha+\beta L), \qquad \text{(B.6)}$$

$$\dot{L}_2=\frac{D_{12}}{n_{1*}^{(0)}}(\alpha-\beta L). \qquad \text{(B.7)}$$

Подставляя $\Theta=(\gamma_1+\gamma_2)^{-1}\alpha L$ из выражения (B.3) и $\dot{L}_i$ из (B.6) и (B.7) в систему уравнений (B.4)–(B.5), получаем

$$\beta=\frac{\alpha^2}{4}\frac{n_{0*}}{n_{1*}^{(0)}n_{2*}^{(0)}}\left(\frac{n_{2*}^{(0)}-n_{1*}^{(0)}}{n_{2*}^{(0)}+n_{1*}^{(0)}}-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}\right)\times\left[1+O\left(\frac{\beta L}{\alpha}\right)\right]. \qquad \text{(B.8)}$$

Анализируя полученное выражение, можно заметить, что

$$\frac{\beta L}{\alpha}\sim\frac{\alpha L}{4n_{0*}}=\frac{(\gamma_1+\gamma_2)\Theta}{4n_{0*}}$$

действительно оказывается достаточно малым, и $(\gamma_1+\gamma_2)\Theta\,/\,n_{0*}$ может считаться малым параметром в разложениях (B.1) и (B.2). Для кубических по z слагаемых в разложениях (B.1) и (B.2) можно аналогичным образом показать их малость по сравнению с квадратичными слагаемыми. Таким образом, в ведущем порядке достаточно сохранить линейное по z слагаемое в уравнениях (B.1) и (B.2) и пренебречь слагаемыми высших порядков.

Можно заметить, что согласно выражению (B.8), параметр β полностью исчезает при $n_{2*}^{(0)}\,/\,n_{1*}^{(0)}=\gamma_2\,/\,\gamma_1$ и линейное решение становится точным.

ПРИЛОЖЕНИЕ С. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПАРОВОЙ СМЕСИ

Для начала, найдем концентрацию насыщенных паров и температуру поверхностного кипения системы двух несмешивающихся жидкостей T_*. Для многих жидкостей эти параметры достаточно точно определены экспериментальными методами, но существуют и теоретические работы, посвящённые этому вопросу (см., например, [111]).

Будем считать, что термодинамические свойства жидкости не зависят от температуры (это предположение справедливо, для интересующих нас диапазонов температур), а пар является идеальным газом. Согласно [111], отношение концентрации насыщенных паров к концентрации газа в интересующем нас случае

$$Y = \frac{n^{(0)}}{n_0} = \frac{P_0}{P}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\Delta c_p}{k_\mathrm{B}}} \exp\left[\frac{v_\mathrm{liq}(P-P_0)}{RT} - \frac{\Delta H_0 - \Delta c_p\, T_0}{k_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)\right], \qquad \text{(C.1)}$$

где k_B — постоянная Больцмана, R — универсальная газовая постоянная, $\Delta c_p = c_{p,\mathrm{vap}} - c_{p,\mathrm{liq}}$ — разность удельных теплоемкостей газовой и жидкой фаз в расчете на одну молекулу, ΔH_0 — теплота парообразования на одну молекулу, нижний индекс «0» обозначает значения, соответствующие температуре объемного кипения T_0 при атмосферном давлении P_0, v_liq — молярная доля жидкой фазы. В интересующем нас случае, $P = P_0$ и

$$Y(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\Delta c_p}{k_\mathrm{B}}} \exp\left[-\frac{\Delta H_0 - \Delta c_p\, T_0}{k_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]. \qquad \text{(C.2)}$$

Найдя производную $Y(T)$ по температуре, можно найти коэффициент γ для уравнения (1.47):

$$\frac{\gamma}{n_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\,Y}{\mathrm{d}\,T}\right|_{T=T_*} = \frac{\Delta H_0 + \Delta c_p (T_* - T_0)}{k_\mathrm{B} T_*^2} Y(T_*). \qquad \text{(C.3)}$$

Таблица С.1. Молекулярные свойства воды и *н*-гептана

$\Delta H_0 \,/\, k_B$ [K]	4892	3821
$\Delta c_p \,/\, k_B$	-5.00	-7.86
d [Å]	2.70	6.66
m [10^{-25} кг]	0.2992	1.664

Используя данные из таблицы 1.1 и таблицы С.1, можно найти концентрацию насыщенных паров для воды и *н*-гептана. На рисунке С.1 построены зависимости $Y_{\mathrm{H_2O}}(T)$, $Y_{\mathrm{C_7H_{16}}}(T)$ и сумма $Y_{H_2O} + Y_{\mathrm{C_7H_{16}}}$. Эта сумма пересекает единицу при температуре T_*; численное решение уравнения

$$Y_{\mathrm{H_2O}}(T_*) + Y_{\mathrm{C_7H_{16}}}(T_*) = 1$$

дает

$$T_* = 351.71\,\mathrm{K} = 78.56^\circ\mathrm{C},$$

$$n^{(0)}_{\mathrm{H_2O}}(T_*) = 0.446\,n_0,$$

$$n^{(0)}_{\mathrm{C_7H_{16}}}(T_*) = 0.554\,n_0,$$

$$\gamma_{\mathrm{H_2O}} / n_0 = 0.0180\,\mathrm{K}^{-1},$$

$$\gamma_{\mathrm{C_7H_{16}}} / n_0 = 0.0177\,\mathrm{K}^{-1}.$$

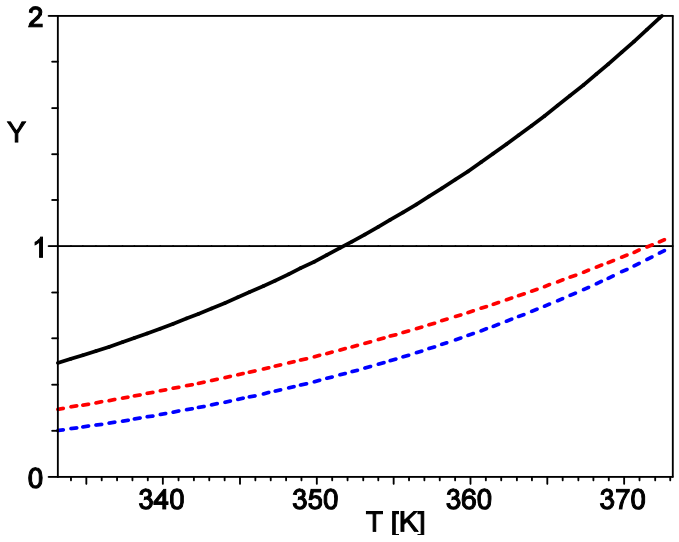


Рисунок С.1. Зависимость параметра $Y = n^{(0)} / n_0$ от температуры для воды (красная линия) и *н*-гептана (синяя линия). Сплошной черной линией построена сумма этих параметров.

Найдем транспортные коэффициенты $D_{12}(T_*)$ и $\eta_{12}(T_*)$. Для их нахождения можно воспользоваться кинетической теорией Чепмена–Энскога для однородных газов [111]. Первое приближение Чепмена–Энскога для коэффициента диффузии D_{12} не зависит от концентрации компонент:

$$D_{12} = \frac{3}{8 n_0 d_{12}^2} \sqrt{\frac{k_\text{B} T}{2\pi} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}, \quad n_0 = \frac{P_0}{k_\text{B} T}. \tag{C.4}$$

Здесь m_j — масса молекулы; πd_{12}^2 — поперечное сечение рассеяния (для газа, состоящего из упругих сфер, d_j — это диаметр сферы), с хорошей точностью $d_{12} = (d_1 + d_2)/2$, где πd_j^2 — поперечное сечение рассеяния при взаимных столкновениях частиц типа j.

В соответствии с [113], вязкость смеси идеальных газов может быть найдена по формуле

$$\eta_{12} \approx \frac{\eta_1}{1 + \dfrac{(n_2 / n_1)[1 + (\eta_1 / \eta_2)^{1/2} (m_2 / m_1)^{1/4}]^2}{(4/\sqrt{2})[1 + (m_1 / m_2)]^{1/2}}} + \\ + \frac{\eta_2}{1 + \dfrac{(n_1 / n_2)[1 + (\eta_2 / \eta_1)^{1/2} (m_1 / m_2)^{1/4}]^2}{(4/\sqrt{2})[1 + (m_2 / m_1)]^{1/2}}}, \tag{C.5}$$

где η_j — динамическая вязкость j-го газа при атмосферном давлении. При температуре T_*, $n_j = n_j^{(0)}$. Динамическая вязкость однокомпонентного газа, в свою очередь, может быть найдена из теории Чепмена–Энскога [113]:

$$\eta_j = 1.02513 \frac{5}{16} \frac{\sqrt{m_j k_\text{B} T}}{\pi^{1/2} d_j^2 \Omega_\eta (k_\text{B} T / \varepsilon_{12})}, \tag{C.6}$$

где геометрический параметр Ω_{η} имеет порядок 1 и характеризует межчастичные взаимодействия в момент столкновения, ε_{12} характеризует энергию мечастичного взаимодействия.

Используя выражения (С.4)–(С.6) и данные таблицы С.1, для воды и *н*-гептана при $T = T_{*}$ получаем

$$D_{12}(T_{*}) = 1.20 \cdot 10^{-5}\,\text{м}^2 \,/\, \text{с} \quad \text{и} \quad \eta_{12}(T_{*}) = 0.59 \cdot 10^{-5}\,\text{Па} \cdot \text{с}\,.$$